Auxiliar 2 - Relaciones, Funciones y Crecimiento

Cátedra: Matemáticas Discretas
Profesor: Pablo Barceló
Auxiliares: Miguel Romero, Francisco Unda

13 de Abril del 2010

1. Pruebe que la relacion dividir a, notada $|$, es un orden parcial y que la relación igualdad módulo p, notada $=_p$ es de equivalencia.

2. Decimos que una relación R en A es cuasi-orden si es refleja y transitiva. Demuestre que:
   (a) Si R es cuasi-orden en A, entonces $R \cap R^{-1}$ es una relación de equivalencia.
   (b) Si S es una relación en el conjunto de clases de equivalencia de $R \cap R^{-1}$ tal que $(C, D) \in S$ ssi $\exists c \in C$ y $d \in D$ tal que $(c, d) \in R$, entonces S es un orden parcial.

3. Sea R es una relación en A. Demuestre que si R es simétrica y transitiva, y además $\forall a \in A$, $\exists b \in A$ tal que $(a, b) \in R$ entonces es refleja. Además pruebe que si R es una relacón simétrica en A, y definimos para cada $a \in A$: $N(a) = \{b \in A | (a, b) \in R\}$, se tiene que $\forall a$, $b \in A$, $a \in N(b) \Leftrightarrow b \in N(a)$.

4. Sea P un conjunto finito de variables proposicionales y Σ un conjunto infinito de oraciones. Demuestre que Σ es finitamente satisfacible ssi Σ es satisfacible. Y como corolario demuestre que $\Sigma \models \alpha$ ssi $\exists \Sigma' \subset \Sigma$, finito tal que $\Sigma' \models \alpha$.

5. Sean f y g funciones. Probar que
   (a) Si f y g son inyectivas, entonces $f \circ g$ lo es.
   (b) Si f y g son sobreyectivas, entonces $f \circ g$ lo es.
   (c) Si $f \circ g$ es inyectiva, entonces g lo es.

   Sea ahora R una relación en $A \times B$, y $D(A) = \{(a, a) | a \in A\}$. Verificar las siguientes propiedades:
   (a) R es función ssi $R^{-1}R \subset D(B)$ y para cada elemento de A, $\exists b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.
   (b) Si R es función, es inyectiva ssi $RR^{-1} \subset D(A)$.
   (c) R es transitiva ssi $\forall n$, $R^n \subset R$
   (d) Si R tiene n elementos, entonces $R^* = \bigcup_{i \leq n} R^i$

6. Crecimiento de funciones: Definiciones
   (a) Sean f y g dos funciones definidas de $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Decimos que f es $O(g)$ si existen constantes c y k tal que $\forall x > k$, $f(x) > cg(x)$.
   (b) Decimos que $f \in \Omega(g)$ ssi $g \in O(f)$.
   (c) Decimos que $f \in \Theta(g)$ ssi $f \in O(g)$ y $g \in O(f)$.

(d) Decimos que $f \in o(g)$ ssi $f \notin \Omega(g)$.

(e) Decimos que $f \in w(g)$ ssi $f \notin O(g)$.

7. Mostrar que todo polinomio de grado n es $O(x^n)$, y más aún ningún polinomio de grado n es $O(x^{n-1})$.

8. Sea F el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Demuestre que Θ es una relacion de equivalencia en F. Si ahora F_Θ es el conjunto de las clases de equivalencia inducidos por Θ, definiendo $[f]_\Theta \in O([g]_\Theta)$ cuando $f \in O(g)$, mostrar que O es un orden parcial en F_Θ. Mostrar que este no es un orden total, ni un buen orden. Como se puede restringir F_Θ para que sí lo sea?