

Auxiliar 1 - Lógica Proposicional

Cátedra: Matemáticas Discretas

Profesor: Pablo Barceló

Auxiliares: Miguel Romero, Francisco Unda

31 de Marzo del 2010

1. Decimos que una fórmula ϕ está en CNF si es de la forma

$$\bigwedge_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^{n_i} l_{ij}$$

donde los l_{ij} son literales, es decir, una variable proposicional o la negación de alguna variable. Decimos que ϕ está en 3-CNF si $n_i = 3 \quad \forall i \in \{1..m\}$. Sea $P = \{p, q, r, s\}$ variables proposicionales. Pruebe que existe una fórmula tal que no es equivalente a ninguna fórmula en 3-CNF.

2. Dadas fórmulas proposicionales φ , ψ y θ , y un conjunto de fórmulas Σ , demuestre que si $\varphi \rightarrow \psi$ es tautología, entonces $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \theta$.
3. Dada una fórmula φ en CNF, construya una fórmula ψ_φ en 3-CNF tal que φ es satisfacible si y solo si ψ_φ es satisfacible (la construcción se debe basar solo en la estructura de φ).
4. Dado un grafo $G = (V, E)$, un vertex cover de G es un conjunto de nodos $W \subseteq V$ tal que para todo arco $e \in E$, al menos un extremo de e está en W . Dada una fórmula φ en 3-CNF construya un grafo G_φ tal que φ es satisfacible si y solo si G_φ tiene un vertex cover de tamaño $2r + n$, donde r es el número de cláusulas de φ y n la cantidad de variables proposicionales que aparecen en φ (la construcción se debe basar solo en la estructura de φ).
5. Decimos que dos grafos $G_1 = (N_1, A_1)$ y $G_2 = (N_2, A_2)$ son isomorfos si existe una biyección $f : N_1 \rightarrow N_2$ tal que para todo a y b en N_1 se tiene que $(a, b) \in A_1$ si y sólo si $(f(a), f(b)) \in A_2$. Dados dos grafos G_1 y G_2 construya una fórmula φ_{G_1, G_2} tal que G_1 y G_2 son isomorfos si y sólo si φ_{G_1, G_2} es satisfacible (la construcción se debe basar solo en la estructura de G_1 y G_2).
6. Sea P un conjunto arbitrario de variables proposicionales. Un conjunto de fórmulas Σ se dice finitamente satisfacible si todo subconjunto finito de Σ es satisfacible. Se

sigue de la definición que si Σ es finito, el hecho de ser finitamente satisfacible es equivalente a ser satisfacible, pero si Σ es infinito, no es directo que sea así (aunque se puede demostrar que sí lo es).

Sea Σ un conjunto de fórmulas en $L(P)$, tal que Σ es finitamente satisfacible. Demuestre que para cualquier fórmula $\alpha \in L(P)$, se tiene que $\Sigma \cup \{\alpha\}$ es finitamente satisfacible o $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es finitamente satisfacible.

7. Asuma que se cumple que Σ es finitamente satisfacible si y solo si es satisfacible, para cualquier Σ . Demuestre que para cualquier fórmula α , $\Sigma \models \alpha$ si y solo si existe un subconjunto finito $\Sigma' \subseteq \Sigma$ tal que $\Sigma' \models \alpha$.