

Capítulo 3: Técnicas de Conteo

Clase 3: Conteo utilizando relaciones de recurrencia

Matemática Discreta - CC3101
Profesor: Pablo Barceló

Muchos problemas de conteo no pueden ser resueltos con las técnicas que hemos visto hasta ahora.

Ejemplo: ¿Cuántos strings de largo n no contienen dos 0s consecutivos?

Para resolver algunos de estos problemas utilizaremos las **relaciones de recurrencia**.

Relaciones de recurrencia

Definición

Una **relación de recurrencia** para la secuencia $\{a_n\}$ es una ecuación que expresa a_n en términos de $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, para todo entero $n \geq n_0$.

Una secuencia es una **solución** de la relación de recurrencia si satisface los términos de la relación.

Ejercicio: ¿Es $a_n = 3n$ una solución para la relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n = 2, 3, 4, \dots$? ¿Es $a_n = 2^n$ una solución? ¿Es $a_n = 5$ una solución?

Para poder determinar exactamente una secuencia además necesitamos entregar sus **condiciones iniciales**.

Ejemplo de relación de recurrencia

Ejercicio: Usted deposita \$1000 en su cuenta de ahorro que da un 11 % de interés anual. ¿Cuánto tendrá en 30 años?

Ejemplo de relación de recurrencia

Ejercicio: Usted deposita \$1000 en su cuenta de ahorro que da un 11 % de interés anual. ¿Cuánto tendrá en 30 años?

Note que $P_0 = 1000$ y que para cada $n \geq 0$, $P_{n+1} = P_n + 0,11P_n$.

Una ecuación explícita para P_n es $(1,11)^n P_0 = (1,11)^n \cdot 1000$.

Por último, $P_{30} \approx 22900$.

Otro ejercicio

Ejercicio: Asuma que deja un par de conejos en una isla. Los conejos no se reproducen hasta que tienen 2 meses. Después de los dos meses, cada conejo produce un nuevo par de conejos mensualmente. Los conejos no mueren.

Encuentre una relación de recurrencia que exprese el número de pares de conejos en el mes n .

Otro ejercicio

Ejercicio: Asuma que deja un par de conejos en una isla. Los conejos no se reproducen hasta que tienen 2 meses. Después de los dos meses, cada conejo produce un nuevo par de conejos mensualmente. Los conejos no mueren.

Encuentre una relación de recurrencia que exprese el número de pares de conejos en el mes n .

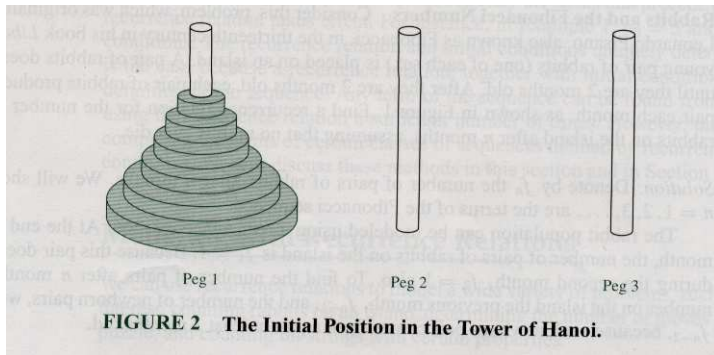
Condición inicial: $f_0 = 1$ y $f_1 = 1$.

Relación de recurrencia: # de conejos el mes $n =$ # de conejos en mes $n - 1 +$ nuevos pares de conejos.

Por tanto, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para todo $n \geq 2$.

Torres de Hanoi

Las **torres de Hanoi** son un puzzle popular del siglo XIX, que consiste de 3 barras montadas en un tablero y una serie de discos de diferente tamaño. La configuración inicial de los discos es como se muestra a continuación.



Torres de Hanoi: Reglas y objetivo

Las reglas del juego permiten traspasar discos de a uno, de una barra a otra, de tal modo que nunca un disco quede arriba de un disco más chico.

El objetivo del juego es traspasar todos los discos a otra barra, en orden de tamaño.

Ejercicio de torres de Hanoi

Ejercicio: Defina una relación de recurrencia $\{H_n\}$ que determine el número de movidas necesarias para resolver el problema de las torres de Hanoi con n discos. Luego resuélvala.

Ejercicio de torres de Hanoi

Ejercicio: Defina una relación de recurrencia $\{H_n\}$ que determine el número de movidas necesarias para resolver el problema de las torres de Hanoi con n discos. Luego resuélvala.

La respuesta es $H_1 = 1$ y $H_n = 2H_{n-1} + 1$, para $n \geq 2$.

Ejercicio de torres de Hanoi

Ejercicio: Defina una relación de recurrencia $\{H_n\}$ que determine el número de movidas necesarias para resolver el problema de las torres de Hanoi con n discos. Luego resuélvala.

La respuesta es $H_1 = 1$ y $H_n = 2H_{n-1} + 1$, para $n \geq 2$.

Por tanto, $H_n = 2^n - 1$.

Ejercicios finales

Ejercicio: Un string de números decimales es válido si contiene un número par de 0s. Defina una relación de recurrencia $\{c_n\}$ que entregue el número de strings válidos de largo n .

Ejercicio: Defina recursivamente la sucesión $\{a_n\}$ que da la cantidad de strings de largo n que tienen dos 0s consecutivos.

Ejercicio: Defina recursivamente la sucesión $\{b_n\}$ que da la cantidad de strings de largo n que no tienen tres 0s consecutivos.

Más ejercicios finales

En estos ejercicios considere alfabeto ternario $\{a, b, c\}$.

Ejercicio: Defina recursivamente la sucesión $\{c_n\}$ que da la cantidad de strings de largo n que no tienen dos a's consecutivas.

Ejercicio: Defina recursivamente la sucesión $\{d_n\}$ que da la cantidad de strings de largo n que no tienen ni dos a's ni dos b's consecutivas.

Ejercicio: Defina recursivamente la sucesión $\{e_n\}$ que da la cantidad de strings de largo n que no tienen ni dos a's ni dos b's ni dos c's consecutivas.

Resolviendo relaciones de recurrencia

Como hemos visto, las relaciones de recurrencia ocurren naturalmente al momento de modelar problemas de conteo.

Esto naturalmente genera el problema de cómo resolver estas relaciones de recurrencia.

Muchas veces esto no es fácil, pero desarrollaremos una técnica para al menos una clase de estas relaciones: Las **relaciones de recurrencia lineales con coeficientes constantes**.

Relaciones de recurrencia lineales y homogéneas

Comenzaremos con un caso particular de esta clase de relaciones de recurrencia:

Definición

Una relación de recurrencia es *lineal, homogénea y tiene coeficientes enteros* si es de la forma

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_k$ son números reales y $c_k \neq 0$. Decimos que la relación en este caso es de *grado k* .

Relaciones de recurrencia lineales y homogeneas

Comenzaremos con un caso particular de esta clase de relaciones de recurrencia:

Definición

Una relación de recurrencia es *lineal, homogenea y tiene coeficientes enteros* si es de la forma

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_k$ son números reales y $c_k \neq 0$. Decimos que la relación en este caso es de *grado k* .

La relación de recurrencia:

- ▶ $a_n = a_{n-1}^2$ no es lineal;
- ▶ $a_n = a_{n-1} + 1$ no es homogenea;
- ▶ $a_n = na_{n-1}$ no tiene coeficientes enteros.

Resolviendo estas relaciones de recurrencia

Estudiamos este tipo de relaciones de recurrencia porque a menudo aparecen al modelar problemas, y porque pueden ser resueltas sistemáticamente.

La idea es tratar de buscar soluciones de la forma r^n , donde r es una constante.

Note que esto es cierto si y sólo si:

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}$$

O equivalentemente:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0.$$

Resolviendo estas relaciones de recurrencia

Estudiamos este tipo de relaciones de recurrencia porque a menudo aparecen al modelar problemas, y porque pueden ser resueltas sistemáticamente.

La idea es tratar de buscar soluciones de la forma r^n , donde r es una constante.

Note que esto es cierto si y sólo si:

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}$$

O equivalentemente:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0.$$

Por tanto, la secuencia $\{a_n\} = r^n$ es una solución a la relación de recurrencia si y sólo si es solución de la ecuación anterior (llamada **ecuación característica**).

Relaciones de recurrencia de grado 2

Para simplificar la presentación estudiaremos primero relaciones de recurrencia como las antes mostradas pero de **grado 2**.

Teorema

Sean c_1, c_2 números reales y asuma que $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ tiene dos raíces distintas r_1 y r_2 . Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución a la relación de recurrencia $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ si y sólo si $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ donde α_1 y α_2 son constantes.

Demostración del teorema

Asuma primero que $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$.

Ya que r_1 y r_2 son raíces, $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$ y $r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1 (\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2 (\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2} (c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2} (c_1 r_2 + c_2) \\ &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\ &= a_n \end{aligned}$$

Concluimos que $\{a_n\} = \{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}$ es una solución a la relación de recurrencia.

Demostración del teorema

Asuma ahora que $\{a_n\}$ es solución para $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$.
Demostraremos que $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, para algún α_1 y α_2 .

Considere condiciones iniciales $a_0 = K_0$ y $a_1 = K_1$.

Entonces deberíamos tener que $a_0 = K_0 = \alpha_1 + \alpha_2$ y
 $a_1 = K_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$.

Obtenemos entonces que

- ▶ $\alpha_1 = (C_1 - C_0 r_2)/(r_1 - r_2)$.
- ▶ $\alpha_2 = (C_0 r_1 - C_1)/(r_1 - r_2)$.

Demostración del teorema

Sean α_0 y α_1 como los calculamos recién.

Ya sabemos que $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ es solución. Además, satisface las condiciones iniciales.

Luego

$$\{a_n\} = \{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}$$

porque solo existe una solución para $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ que satisface las condiciones iniciales.

Ejercicio: Encuentre la solución a la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, con $a_0 = 2$ y $a_1 = 7$.

Ejercicio: Encuentre una solución explícita a los números de Fibonacci.

Ecuaciones con solo una raíz

Note que en la demostración anterior usamos esencialmente el hecho de que la ecuación tenía dos raíces **distintas** (¿dónde?).

¿Qué pasa cuando tenemos una sola raíz?

Teorema

Sean c_1, c_2 números reales y asuma que $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ tiene como única raíz a r_0 . Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución a la relación de recurrencia $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ si y sólo si $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ donde α_1 y α_2 son constantes.

Ejercicio: ¿Cuál es la solución de la relación de recurrencia $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, con $a_0 = 1$ y $a_1 = 6$?

Relaciones de recurrencia de grado k

Generalizemos los resultados anteriores (demostraciones son similares):

Teorema

Sean $c_1, c_2, \dots, c_k$ números reales y asuma que $r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_k = 0$ tiene k distintas raíces $r_1, \dots, r_k$. Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución a la relación de recurrencia $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$ si y sólo si $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ son constantes.

Ejercicio: Resuelva la relación de recurrencia

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ tal que $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ y $a_2 = 15$.

Relaciones de recurrencia de grado k

Y finalmente, el caso más general.

Teorema

Sean $c_1, c_2, \dots, c_k$ números reales y asuma que $r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_k = 0$ tiene t distintas raíces $r_1, \dots, r_t$ con multiplicidades $m_1, m_2, \dots, m_t$. Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución a la relación de recurrencia

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$ si y sólo si

$$\begin{aligned} a_n = & (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \dots + \alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1})r_1^n \\ & + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n + \dots + \alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1})r_2^n \\ & + \dots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1}n + \dots + \alpha_{t,m_t-1}n^{m_t-1})r_t^n \end{aligned}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ donde todos los $\alpha_{i,j}$ son constantes.

Relaciones de recurrencia de grado k

Y finalmente, el caso más general.

Teorema

Sean $c_1, c_2, \dots, c_k$ números reales y asuma que $r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_k = 0$ tiene t distintas raíces $r_1, \dots, r_t$ con multiplicidades $m_1, m_2, \dots, m_t$. Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución a la relación de recurrencia

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$ si y sólo si

$$\begin{aligned} a_n = & (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \dots + \alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1})r_1^n \\ & + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n + \dots + \alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1})r_2^n \\ & + \dots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1}n + \dots + \alpha_{t,m_t-1}n^{m_t-1})r_t^n \end{aligned}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ donde todos los $\alpha_{i,j}$ son constantes.

Ejercicio: Solucione $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ con $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ y $a_2 = -1$.

Ejercicio de recurrencias simultaneas

Ejercicio: Resuelva las siguientes relaciones de recurrencias simultaneas:

$$a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

$$b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

Asuma $a_0 = 1$ y $b_0 = 2$.

Relaciones de recurrencia no homogeneas

Asuma que $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n)$ es una relación de recurrencia no homogenea.

Llamamos a $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ su relación de recurrencia **homogenea asociada**.

Entonces las soluciones de esta relación de recurrencia tienen una forma particular:

Teorema

Si $\{a_n^{(p)}\}$ es una solución de la relación de recurrencia $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n)$, entonces toda solución es de la forma $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, donde $\{a_n^{(h)}\}$ es una solución de la relación de recurrencia homogenea asociada.

Ejercicio: Demuestre el teorema.

Soluciones para relaciones de recurrencia no homogeneas

La clave está entonces en obtener una solución para la relación de recurrencia no homogenea. Esto podemos lograrlo para algunos casos:

Teorema

Sea $\{a_n\}$ definido como $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n)$, y asuma que

$$f(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0) s^n,$$

donde $b_0, b_1, \dots, b_t$ y s son números reales. Entonces,

- ▶ Si s no es “raíz” de la relación de recurrencia asociada, entonces existe una solución particular de la forma $(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$.
- ▶ Si s es “raíz” de la relación de recurrencia asociada con multiplicidad m , entonces existe una solución particular de la forma $n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$.

Ejercicios finales

Ejercicio: Encuentre la forma de una solución para $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + f(n)$ cuando $f(n) = n3^n$ y cuando $f(n) = (n^2 + 1)2^n$.

Ejercicio: Defina la recurrencia $\{s_n\}$ que define la suma de los primeros n números naturales. Luego resuélvala utilizando el teorema anterior.