Capítulo 2: Inducción y recursión
Clase 1: El principio de Inducción

Matemática Discreta - CC3101

Profesor: Pablo Barceló

Motivación

Es común decir en matemática que una propiedad es cierta de todos los números naturales:

- Para todo entero positivo n, $n! \leq n^n$.

La inducción es una técnica muy usual en matemáticas que sirve para probar este tipo de resultados:

- Sus orígenes se pueden remontar hasta Euclides y varios matemáticos persas;
- los primeros que la formalizaron fueron Fermat y Maurolico, en el Siglo XVI.

Principio de inducción

Principio de inducción: Una propiedad P es cierta de todos los números naturales si:

- $P(1)$ es cierto, y
- para todo número natural n, si $P(n)$ es cierto entonces $P(n+1)$ es cierto.

Principio de inducción

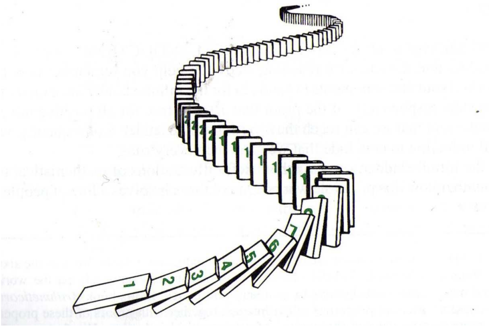
Principio de inducción: Una propiedad P es cierta de todos los números naturales si:

- $P(1)$ es cierto, y
- para todo número natural n, si $P(n)$ es cierto entonces $P(n+1)$ es cierto.

O más formalmente:

$$P(1) \wedge \forall k(P(k) \rightarrow P(k+1)) \Rightarrow \forall n P(n)$$

Ilustración del principio



Si el primer dominó cae, y si cae un dominó entonces cae el siguiente, entonces todos los dominos caen.

Ejemplo: Formúlas de suma

Ejemplo: Utilice inducción para probar que la suma de los n primeros enteros positivos es $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ejemplo: Formúlas de suma

Ejemplo: Utilice inducción para probar que la suma de los n primeros enteros positivos es $\frac{n(n+1)}{2}$.

Primero probamos que la propiedad se cumple para 1 (esto usualmente se llama caso base).

- Funciona en este caso pues $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Ejemplo: Fórmulas de suma

Luego probamos el caso inductivo: Si la propiedad se cumple en un número n arbitrario (hipótesis inductiva) entonces también se cumple en $n+1$.

- Sea n un entero positivo arbitrario. Por hipótesis inductiva:

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Pero entonces,

$$\begin{aligned}
1+2+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Deficiencias de la inducción

Observación: A pesar de que la inducción es una excelente técnica para demostrar este tipo de propiedades, tiene el problema de que no nos dice en absoluto cómo llegar a la fórmula que se quiere probar.

Deficiencias de la inducción

Observación: A pesar de que la inducción es una excelente técnica para demostrar este tipo de propiedades, tiene el problema de que no nos dice en absoluto cómo llegar a la fórmula que se quiere probar.

Ejercicio: Conjeture una fórmula que defina la suma de los primeros n números impares, donde n es un entero positivo, y demuestre por inducción que esta fórmula es correcta.

Ejemplos más complejos de inducción

La inducción no sólo funciona para propiedades de los enteros positivos. También funciona si queremos probar algo para cada entero $\geq b$.

Ejemplos más complejos de inducción

La inducción no sólo funciona para propiedades de los enteros positivos. También funciona si queremos probar algo para cada entero $\geq b$.

Ejercicio: Demuestre que para todo entero no negativo n, si $r \neq 1$ entonces:

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$$

El caso base es trivial. A continuación probamos el caso inductivo.

Ejemplos más complejos de inducción

Caso inductivo: Asuma por hipótesis inductiva que para un entero no negativo arbitrario n se tiene que $\sum_{j=0}^{n} ar^j = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$.

Luego, $\sum_{j=0}^{n+1} ar^j = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1} + ar^{n+1}$.

Pero, claramente:

$$\frac{ar^{n+1}-a}{r-1} + ar^{n+1} = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1} - \frac{ar^{n+2}-ar^{n+1}}{r-1} = \frac{ar^{n+2}-a}{r-1}.$$

Esto termina nuestra hipótesis inductiva, y también nuestra demostración.

Desigualdades e inducción

Mediante la inducción también podemos demostrar desigualdades.

Ejercicio: Los números armónicos H_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, se definen como

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}$$

Demuestre que para todo entero no negativo n, $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

Sólo probaremos a continuación el caso inductivo.

Caso inductivo: Asuma por hipótesis inductiva que para un número entero no negativo arbitrario n se tiene que $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

Note que $H_{2^{n+1}} \; = \; H_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$.

Por hipótesis inductiva, $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

Además, $\frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$.

Concluimos que $H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}$.

Usos creativos de la inducción

Ejemplo: Un número impar de gente se para en un parque de manera que la distancia entre ellos es mutuamente distinta. Cada persona lanza una torta a la persona que tiene más cerca. Demuestre usando inducción que siempre existe una persona a la que no le llega una torta en la cara.

Ejemplo: Un número impar de gente se para en un parque de manera que la distancia entre ellos es mutuamente distinta. Cada persona lanza una torta a la persona que tiene más cerca. Demuestre usando inducción que siempre existe una persona a la que no le llega una torta en la cara.

Demostraremos la siguiente proposición para cada entero $n > 0$:

Existe una persona a la que no le llega la torta cuando el número de personas que se para en el parque es $2n + 1$.

¿Por qué esto es suficiente?

Usos creativos de la inducción

Ejemplo: Un número impar de gente se para en un parque de manera que la distancia entre ellos es mutuamente distinta. Cada persona lanza una torta a la persona que tiene más cerca. Demuestre usando inducción que siempre existe una persona a la que no le llega una torta en la cara.

Demostraremos la siguiente proposición para cada entero $n > 0$:

Existe una persona a la que no le llega la torta cuando el número de personas que se para en el parque es $2n + 1$.

¿Por qué esto es suficiente?

Ejercicio: Demuestre el caso base.

Caso inductivo: Asuma por hipótesis inductiva que alguien se salva cuando el número de personas es $2n + 1$.

Asuma que hay $2n + 3$ personas participando. Sean A y B las personas que están a la mínima mutua distancia. (Entre todo otro par de personas hay mayor distancia). Por tanto, A y B se lanzan la torta mutuamente.

Si alguien más le lanza la torta a A o B, entonces el máximo de tortas lanzadas entre el resto de los participantes es $2n$, y por tanto, hay alguien al que no le llega torta.

Asuma entonces, que la única torta que recibe A es la de B, y viceversa. El resto del grupo incluye a $2n + 1$ personas a distancias mutuas diferentes. Por hipótesis inductiva a alguien no le llega la torta en este grupo.

Ejercicios

Ejercicio: Demuestre que si $h > -1$, entonces para todo entero no negativo n se tiene que $1 + nh \leq (1+h)^n$.

Ejercicio: Demuestre que para todo entero positivo n se tiene que $\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\ell}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

Ejercicio: Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos. La *media aritmética* se define como

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$$

mientras que la *media geométrica* se define como

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

Demuestre que $A \geq G$.