MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2009-03
Profesor: Julio López
Auxiliar: Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 04-05
28-31/diciembre/2009

P2. La ecuación

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b\ln(P))$$

se utiliza en el pronóstico de crecimiento de poblaciones. En esta ecuación $a > 0$ y b son constantes.

a) Encuentre la solución de esta ecuación en términos de a, b, $P_0 = P(0)$, t.

b) Describa el comportamiento de $P(t)$ cuando $t \longrightarrow \infty$ (considere los casos $b > 0$, $b < 0$)

Sol: usando variables separables, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= P(a - b\ln(P)) \\ \int \frac{dP}{P(a - b\ln(P))} &= \int dt \\ -\frac{1}{b}\ln(a - b\ln(P)) &= t + K \\ a - b\ln(P) &= D\exp(-bt) \\ P(t) &= \exp\left(\frac{1}{b}[a - De^{-bt}]\right) \end{aligned}$$

donde $D = \exp(-bK)$. Del desarrollo anterior, notamos que $a - b\ln(P_0) = D$, y se concluye

$$P(t) = \exp\left(\frac{1}{b}[a - (a - b\ln(P_0))\exp(-bt)]\right)$$

Para estudiar el límite, recordemos que $\exp(x)$ es una función continua:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} P(t) &= \lim_{t\to\infty} \exp\left(\frac{1}{b}[a - (a - b\ln(P_0))\exp(-bt)]\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{b}[a - (a - b\ln(P_0))\lim_{t\to\infty}\exp(-bt)]\right) \end{aligned}$$

Así, el valor que toma $\lim_{t\to\infty} P(t)$ depende sólo de $(a - b\ln(P_0))\exp(-bt)$, el cual puede variar según el valor de b. Analizando por casos:

C1: $b > 0$
Se tiene que $\exp(-bt) \to 0$, luego $\lim_{t\to\infty} P(t) = \exp\left(\frac{a}{b}\right)$

C2: $b < 0$
$\exp(-bt) \to \infty$. En esta situación notamos que hay 2 subcasos:

C2.1: $a - b\ln(P_0) > 0$
$\lim_{t\to\infty} P(t) = 0$

C2.2: $a - b\ln(P_0) < 0$
$\lim_{t\to\infty} P(t) = \infty$

P3. Considere el problema con condición inicial

$$(1 + x^2)y' + 2xy = f(x), \quad y(0) = 0$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1) \\ -x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Encuentre una solución continua (no de clase C^1) de este problema. Evalúe $y'(1_+)$, $y'(1_-)$ y demuestre $y'(1_+) - y'(1_-) = -1$.

Sol:

$$\begin{aligned} (1 + x^2)y' + 2xy &= f(x) \\ \frac{d}{dx}((1 + x^2)y) &= f(x) \\ y(x) &= \frac{1}{1 + x^2}\int f(x) \end{aligned}$$

Ya que $y(x)$ depende de $f(x)$:

C1: $x \in [0,1)$
$$y_I(x) = \frac{\frac{x^2}{2} + k_1}{1 + x^2}$$

C2: $x \geq 1$
$$y_D(x) = \frac{\frac{-x^2}{2} + k_2}{1 + x^2}$$

Usando la condición inicial en $y_I(x)$, se obtiene que $k_1 = 0$.
Además, se busca una solución continua, y dado que $x = 1$ es el único punto donde podría haber problemas:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} y(x) &= y(1) \\
\lim_{x\to 1} y_I(x) &= y_D(1) \\
\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{2(1+x^2)} &= \frac{\frac{-1}{2}+k_2}{2} \\
\frac{1}{4} &= \frac{\frac{-1}{2}+k_2}{2} \\
k_2 &= 1
\end{aligned}$$

Finalmente, la solución buscada está dada por:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2(1+x^2)} & \text{si } x \in [0,1) \\ \frac{2-x^2}{2(1+x^2)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Veamos ahora que $y'(1_+) - y'(1_-) = -1$:

$$y'(1_+) = \lim_{x\to 1_+} y'(x) = \lim_{x\to 1_+} \frac{d}{dx}\left(\frac{2-x^2}{2(1+x^2)}\right) = \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{1+x^2} - 1\right) = \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{2}\left(\frac{-3\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{-3}{4}$$

$$y'(1_-) = \lim_{x\to 1_-} y'(x) = \lim_{x\to 1_-} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2(1+x^2)}\right) = \lim_{x\to 1_-} \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to 1_-} \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{1}{4}$$

Así, es claro que $y'(1_+) - y'(1_-) = -1$

P4. Determinar la función $N(t, y)$ tal que la siguiente ecuación diferencial

$$\left(\sqrt{\frac{y}{t}} + \frac{t}{t^2 + y}\right)dt + N(t, y)dy = 0$$

sea exacta.

Sol: Impongamos que la ecuación sea exacta e integremos respecto a t:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{y}{t}} + \frac{t}{t^2 + y}\right) &= \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} \\
\frac{1}{2\sqrt{yt}} - \frac{t}{(t^2 + y)^2} &= \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} \\
\sqrt{\frac{t}{y}} + \frac{1}{2(t^2 + y)} &= N(t, y) + k
\end{aligned}$$