MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2009-03
Profesor: Julio López
Auxiliar: Sebastián Reyes Riffo

Pauta Control 2, MA2601 EDO (21/01/10)

P1. (6 pts.) Para α, $\beta > 0$, resuelva la siguiente EDO

$$t^3y^{(3)} + 3t^2y^{(2)} + (1 - 3\alpha\beta)ty' + (\alpha^3 + \beta^3)y = t^{-(\alpha+\beta)} + \ln(t^{\alpha+\beta})$$

Indicaciones:

- *use el cambio de variables $u = ln(t)$ y resuelva la nueva ecuación a coeficientes constantes.*
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

SOLUCIÓN: A partir del cambio de variable $u = ln(t)$, basta considerar la nueva variable $\overline{y} = y(u)$. Calculando sus derivadas respecto a t:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} = \overline{y}'\frac{1}{t} \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \overline{y}''\frac{du}{dt}\frac{1}{t} - \overline{y}'\frac{1}{t^2} = (\overline{y}'' - \overline{y}')\frac{1}{t^2} \\
\frac{d^3y}{dt^3} &= (\overline{y}'''\frac{du}{dt} - \overline{y}''\frac{du}{dt})\frac{1}{t^2} - (\overline{y}'' - \overline{y}')\frac{2}{t^3} = (\overline{y}''' - 3\overline{y}'' + 2\overline{y}')\frac{1}{t^3}
\end{aligned}$$

Reemplazando en la EDO

$$(\overline{y}''' - 3\overline{y}'' + 2\overline{y}') + 3(\overline{y}'' - \overline{y}') + (1 - 3\alpha\beta)\overline{y}' + (\alpha^3 + \beta^3)\overline{y} = e^{-u(\alpha+\beta)} + (\alpha + \beta)u$$

y reordenando resulta

$$\overline{y}''' - 3\alpha\beta\overline{y}' + (\alpha^3 + \beta^3)\overline{y} = e^{-u(\alpha+\beta)} + (\alpha + \beta)u \qquad (1)$$

....(1 pto.)

Aplicamos *coeficientes indeterminados* a (1). El polinomio característico de la ecuación homogénea es:

$$\begin{aligned}
p(m) &= m^3 - 3\alpha\beta m + (\alpha^3 + \beta^3) \\
&= (m + (\alpha + \beta))(m^2 + \alpha^2 + \beta^2 - m\alpha - m\beta - \alpha\beta) \\
&= (m + (\alpha + \beta))(m^2 - m(\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta))
\end{aligned}$$

Es directo que $p(m)$ tiene por raíz a $m_1 = -(\alpha + \beta)$. Para hallar las otras dos raíces, se resuelve la ecuación cuadrática $m^2 - m(\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = 0$:

$$
\begin{aligned}
m_{2,3} &= \frac{(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)}}{2} \\
&= \frac{(\alpha+\beta) \pm \sqrt{6\alpha\beta - 3\alpha^2 - 3\beta^2}}{2} \\
&= \frac{(\alpha+\beta) \pm \sqrt{-3(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)}}{2} \\
&= \frac{(\alpha+\beta) \pm i\sqrt{3}(\alpha-\beta)}{2}
\end{aligned}
$$

Luego se tiene que la solución homogénea es

$$\overline{y}_h(u) = c_1 e^{-(\alpha+\beta)u} + c_2 e^{(\alpha+\beta)u/2} cos\left(\frac{\sqrt{3}(\alpha-\beta)}{2}u\right) + c_3 e^{(\alpha+\beta)u/2} sen\left(\frac{\sqrt{3}(\alpha-\beta)}{2}u\right)$$

....(1.5 pts.)

Para encontrar la solución particular, notamos que:

- El anulador de $e^{-(\alpha+\beta)u}$ es $D + (\alpha+\beta)$
- El anulador de $(\alpha+\beta)u$ es D^2
- $\overline{y}''' - 3\alpha\beta\overline{y}' + (\alpha^3+\beta^3)\overline{y} = (D + (\alpha+\beta))(D - m_2)(D - m_3)\overline{y}$

Aplicando los anuladores $D + (\alpha+\beta)$ y D^2 a (1) resulta

$$D^2(D + (\alpha+\beta))^2(D - m_2)(D - m_3)\overline{y} = 0$$

La base de la solución homogénea de esta ecuación es

$$\left\{1,\ u,\ e^{-(\alpha+\beta)u},\ ue^{-(\alpha+\beta)u},\ e^{(\alpha+\beta)u/2} cos\left(\frac{\sqrt{3}(\alpha-\beta)}{2}u\right),\ e^{(\alpha+\beta)u/2} sen\left(\frac{\sqrt{3}(\alpha-\beta)}{2}u\right)\right\}$$

quitando los elementos de la base de $\overline{y}_h(u)$, se obtiene la solución particular:

$$\overline{y}_p(u) = d_1 + d_2 u + d_3 u e^{-(\alpha+\beta)u}$$

....(1.5 pts.)

Para encontrar los coeficientes d_1, d_2, d_3, basta con derivar $\overline{y}_p(u)$ y reemplazar en (1). Calculemos las derivadas:

$$
\begin{aligned}
\overline{y}_p'(u) &= d_2 + d_3 e^{-(\alpha+\beta)u} - d_3(\alpha+\beta)ue^{-(\alpha+\beta)u} \\
\overline{y}_p''(u) &= -2d_3(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)u} + d_3 u(\alpha+\beta)^2 e^{-(\alpha+\beta)u} \\
\overline{y}_p'''(u) &= 3d_3(\alpha+\beta)^2 e^{-(\alpha+\beta)u} - d_3 u(\alpha+\beta)^3 e^{-(\alpha+\beta)u}
\end{aligned}
$$

....(0.5 pts.)

Reemplazando en (1):

$$\begin{aligned}
e^{-u(\alpha+\beta)} + (\alpha+\beta)u &= [3d_3(\alpha+\beta)^2 e^{-(\alpha+\beta)u} - d_3 u(\alpha+\beta)^3 e^{-(\alpha+\beta)u}] + \\
&\quad -3\alpha\beta[d_2 + d_3 e^{-(\alpha+\beta)u} - d_3(\alpha+\beta)ue^{-(\alpha+\beta)u}] + (\alpha^3+\beta^3)[d_1 + d_2 u + d_3 u e^{-(\alpha+\beta)u}] \\
&= [-3\alpha\beta d_2 + (\alpha^3+\beta^3)d_1] + d_2(\alpha^3+\beta^3)u + [3d_3(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta d_3]e^{-(\alpha+\beta)u} \\
&\quad +[-d_3(\alpha+\beta)^3 + 3d_3\alpha\beta(\alpha+\beta) + d_3(\alpha^3+\beta^3)]ue^{-(\alpha+\beta)u}
\end{aligned}$$

donde $-(\alpha+\beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) + (\alpha^3+\beta^3) = 0$. Así, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
-3\alpha\beta d_2 + (\alpha^3+\beta^3)d_1 &= 0 \\
d_2(\alpha^3+\beta^3) &= \alpha+\beta \\
3d_3(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta d_3 &= 1
\end{aligned}$$

Y se concluye

$$d_1 = \frac{3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha^3+\beta^3)^2},\ d_2 = \frac{\alpha+\beta}{\alpha^3+\beta^3},\ d_3 = \frac{1}{3(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)}$$

....(1.5 pts.)

Finalmente, la solución de (1) es

$$\begin{aligned}
\overline{y}_h(u) &= c_1 e^{-(\alpha+\beta)u} + c_2 e^{(\alpha+\beta)u/2} cos\left(\frac{\sqrt{3}(\alpha-\beta)}{2}u\right) + c_3 e^{(\alpha+\beta)u/2} sen\left(\frac{\sqrt{3}(\alpha-\beta)}{2}u\right) + \\
&\quad \frac{3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha^3+\beta^3)^2} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha^3+\beta^3}u + \frac{1}{3(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)}ue^{-(\alpha+\beta)u}
\end{aligned}$$

Para encontrar $y(t)$, basta devolverse con el cambio de variable $u = ln(t)$.

P2. (*a*) (2.5 pts.) Solucione la siguiente EDO homogénea:

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$$

sabiendo que una solución tiene la forma $y_1(x) = e^{mx}$, con m a determinar.

(*b*) (3.5 pts.) Resuelva usando Transformada de Laplace la siguiente EDO:

$$y'' + y = g(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < 2 \\ e^{-t} & , \quad t \geq 2. \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

(*a*) Reemplazando $y_1(x)$ en la ecuación, resulta $m^2(2x+1) + m(4x-2) - 8 = 0$. Resolviendo:

$$\begin{aligned} m &= \frac{-(4x-2) \pm \sqrt{16x^2 - 16x + 4 + 32(2x+1)}}{2(2x+1)} \\ &= \frac{-2(2x-1) \pm \sqrt{16x^2 + 48x + 36}}{2(2x+1)} \\ &= \frac{-(2x-1) \pm (2x+3)}{(2x+1)} \end{aligned}$$

luego, se tiene $m_+ = \dfrac{4}{2x+1}$, solución que se descarta por no ser constante; y $m_- = -2$.
Finalmente, $y_1(x) = e^{-2x}$.

....(1 pto.)

Para obtener $y_2(x)$, basta usar la fórmula de Liouville:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \\ &= e^{-2x} \int \frac{e^{-\int (4x-2)/(2x+1)dx}}{e^{-4x}} dx \end{aligned}$$

Donde $\displaystyle\int \frac{4x-2}{2x+1}dx = \int \frac{4x+2}{2x+1}dx - \int \frac{4}{2x+1}dx = 2x - 2ln(2x+1)$. Así:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= e^{-2x} \int \frac{e^{-2x}(2x+1)^2}{e^{-4x}} dx = e^{-2x} \int e^{2x}(2x+1)^2 dx \\ &= e^{-2x} \left[(2x+1)^2 \frac{e^{2x}}{2} - 2 \int e^{2x}(2x+1) dx \right] \\ &= e^{-2x} \left[(2x+1)^2 \frac{e^{2x}}{2} - 2 \left((2x+1) \frac{e^{2x}}{2} - \int e^{2x} dx \right) \right] \\ &= e^{-2x} \left[(2x+1)^2 \frac{e^{2x}}{2} - 2(2x+1) \frac{e^{2x}}{2} + 2 \frac{e^{2x}}{2} \right] \\ &= \frac{4x^2+1}{2} \end{aligned}$$

....(1.5 pts.)

b Notemos que $g(t) = e^{-t}H(t-2)$, $\forall t > 0$. Luego la ecuación queda:

$$y''(t) + y(t) = e^{-t}H(t-2)$$

Aplicando Transformada de Laplace (y definiendo $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y''(t)](s) + \mathcal{L}[y(t)](s) &= e^{-2}\mathcal{L}[e^{-(t-2)}H(t-2)](s) \\
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) &= e^{-2}\frac{e^{-2s}}{s+1} \\
Y(s) &= \frac{1}{s^2+1}\left(e^{-2(s+1)}\frac{1}{s+1}\right) \\
Y(s) &= \mathcal{L}[sen(t)](s)\ \mathcal{L}[e^{-t}H(t-2)] \\
Y(s) &= \mathcal{L}[(sen(u) * e^{-u}H(u-2))(t)](s)
\end{aligned}$$

Y se concluye que $y(t) = (sen(u) * e^{-u}H(u-2))(t)$.
....(3.5 pts.)

P3. (a) (4pts.)

(i) Si $y(t)$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden p:

$$t^2y''(t) + ty'(t) + (t^2 - p^2)y(t) = 0$$

muestre que la Transformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$(1 + s^2)Y''(s) + 3sY'(s) + (1 - p^2)Y(s) = 0$$

(ii) Resolver esta última ecuación para $p = 0$, expresándola en la forma:

$$\frac{d}{ds}[A(s)Y'(s) + B(s)Y(s)] = 0,$$

para algún $A(s)$ y $B(s)$

(**Sug.** Le puede ser útil la Formula de Liuoville $y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(s)ds} ds$)

(b) (2 pts.) Encuentre $\mathcal{L}^{-1}(\ln(\frac{s^2+1}{s^2+4}))$ y $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s^2+9}\right)$

SOLUCIÓN:

(a) (i) Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^2y''(t)](s) &= \frac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}[y''(t)](s)) = \frac{d^2}{ds^2}(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) \\
&= 2Y(s) + 4sY'(s) + s^2Y''(s) \\
\mathcal{L}[ty'(t)](s) &= \frac{d}{ds}(-\mathcal{L}[y'(t)](s)) = -\frac{d}{ds}(sY(s) - y(0)) = -Y(s) - sY'(s) \\
\mathcal{L}[t^2y(t)](s) &= Y''(s) \\
\mathcal{L}[p^2y(t)](s) &= p^2Y(s)
\end{aligned}$$

....(1.5 pts.)

Aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos:

$$\mathcal{L}[t^2y''(t)](s) + \mathcal{L}[ty'(t)](s) + \mathcal{L}[t^2y(t)](s) + \mathcal{L}[-p^2y(t)](s) = 0$$

al reemplazar los cálculos se tiene:

$$2Y(s) + 4sY'(s) + s^2Y''(s) - Y(s) - sY'(s) + Y''(s) - p^2Y(s) = 0$$

es decir

$$(1 + s^2)Y''(s) + 3sY'(s) + (1 - p^2)Y(s) = 0$$

....(0.4 pts.)

(ii) Poniendo $p = 0$ obtenemos:

$$(1 + s^2)Y''(s) + 3sY'(s) + Y(s) = 0$$

que podemos escribirlo en la forma

$$\frac{d}{ds}[(1 + s^2)Y'(s) + sY(s)] = 0$$

....(0.5 pts.)

Integrando esta última ecuación tenemos:

$$(1 + s^2)Y'(s) + sY(s) = c_1$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden, de factor integrante $e^{-\int s/(s^2+1)dx} = \sqrt{1 + s^2}$. Luego, al aplicarlo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1 + s^2}Y(s)\right) &= c_1\sqrt{1 + s^2} \quad \Big/ \int ds \\ Y(s) &= \frac{c_1}{\sqrt{1 + s^2}} \int \sqrt{1 + s^2}ds + \frac{c_2}{\sqrt{1 + s^2}} \end{aligned}$$

....(1.6 pts.)

Por tanto:

$$Y(s) = \frac{c_1}{\sqrt{1 + s^2}} \ln(s + \sqrt{1 + s^2}) + \frac{c_2}{\sqrt{1 + s^2}}$$

....

(b) Sea $F(s) = \ln(\frac{s^2+1}{s^2+4})$, entonces

$$F'(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} - \frac{2s}{s^2 + 4}$$

De la propiedad 7 se sigue que:

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\left[-\frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{2s}{s^2 + 4}\right]$$

Aplicando transformada inversa:

$$tf(t) = -2\cos(t) + 2\cos(2t) \Rightarrow f(t) = \frac{2}{t}(\cos(2t) - \cos(t))$$

....(1 pto.)

Sea $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. Como $\mathcal{L}(sen(3t)) = \frac{3}{s^2+9}$, entonces por el Teorema de Convolución tenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{F(s)}{s^2 + 9}) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) * \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2 + 9}) = \frac{1}{3}\int_0^t f(t - z)sen(3z)dz$$

....(1 pto.)