MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2009-03
Profesor: Julio López.
Auxiliar: Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 09
18/enero/2010

1. Ecuación de segundo orden

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Para resolverla:

1. Conocida $y_1(t)$, calculamos $y_2(t) = y_1(t)\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2(t)}dt$

2. Si $p(t)$, $q(t)$ son funciones constantes, buscamos soluciones de la forma $y(t) = e^{mt}$. Esto entrega el *polinomio característico* $p(m) = m^2 + am + b$, y el problema se reduce a encontrar sus raíces m_1, m_2:

   - si $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ y $m_1 \neq m_2$, se tiene: $y_1(t) = e^{m_1 t}$, $y_2(t) = e^{m_2 t}$

   - si $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ y $m_1 = m_2$, se tiene: $y_1(t) = e^{m_1 t}$, $y_2(t) = te^{m_1 t}$

   - si $m_1, m_2 \in \mathbb{C}$ y $\alpha + i\beta = m_1 = \overline{m_2}$, se tiene: $y_1(t) = e^{\alpha t}cos(\beta t)$, $y_2(t) = e^{\alpha t}sen(\beta t)$

3. Si la ecuación es de la forma $at^2y'' + bty' + cy = 0$, se prueban soluciones de la forma t^α, con α a determinar de la ecuación $a\alpha(\alpha - 1) + b\alpha + c = 0$.

   - si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_1 \neq \alpha_2$, se tiene: $y_1(t) = t^{\alpha_1}$, $y_2(t) = t^{\alpha_2}$

   - si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_1 = \alpha_2$, se tiene: $y_1(t) = t^{\alpha_1}$, $y_2(t) = t^{\alpha_1}ln(t)$

   - si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ y $\alpha + i\beta = \alpha_1 = \overline{\alpha_2}$, se tiene: $y_1(t) = t^{\alpha}cos(\beta ln(t))$, $y_2(t) = e^{\alpha}sen(\beta ln(t))$

2. Independencia lineal

La familia de funciones
$\{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$ es linealmente independiente *ssi* $W(f_1, \ldots, f_n)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

P1. Sea $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (1)$, con P, $Q : I \to \mathbb{R}$ continuas.

(a) Demuestre que $W(t) = W(y_1, y_2)(t)$, con $y_1(t)$, $y_2(t)$ soluciones de (1), satisface

$$W(t) = Ke^{-\int p(t)dt}$$

(b) Encuentre una expresión para $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)$ en términos de $W(t)$, $y_1(t)$. A partir de esto y de (a), determine $y_2(t)$.

P2. $y_1(x) = -x$ es solución de $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$. Encuentre $y_2(t)$.

P3. Sea la ecuación $sen^2(x)y'' - 3sen(x)cos(x)y' + (1 + 2cos^2(x))y = 0$. Compruebe que $y_1(x) = sen(x)$ es solución y calcule $y_2(x)$.

P4. Resuelva $y'' + (1 + h(t))y' + h(t)y = 0$

P5. Resuelva $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0 \quad x > 0$

Hint: considere funciones de la forma $h(x)cos(\beta x)$ o $g(x)sen(\beta x)$, con $h(x)$, $g(x)$ convenientes.