MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2009-03
Profesor: Julio López.
Auxiliar: Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 10
18/enero/2010

1. Transformada de Laplace

Sea $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ continua por trozos y de orden exponencial, es decir, existen constantes $M>0$, C, $T>0$ tales que

$$|f(t)|\leq Me^{Ct}\quad \forall t\geq T$$

Entonces

$$\exists F(s)=\mathcal{L}(f(t))(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\quad \forall s>C$$

Además, es continua en (C,∞).

1.1. Algunas transformadas importantes

- $\mathcal{L}(1)(s)=\dfrac{1}{s}$
- $\mathcal{L}(t^n)(s)=\dfrac{n!}{s^{n+1}}\quad s>0,\, n\geq 1$
- $\mathcal{L}(e^{at})(s)=\dfrac{1}{s-a}$
- $\mathcal{L}(sen(kt))(s)=\dfrac{k}{s^2+k^2}$
- $\mathcal{L}(cos(kt))(s)=\dfrac{s}{s^2+k^2}$
- $\mathcal{L}(senh(kt))(s)=\dfrac{k}{s^2-k^2}$
- $\mathcal{L}(cosh(kt))(s)=\dfrac{s}{s^2-k^2}$

1.2. Teoremas importantes

Sea $a\in\mathbb{R}$, y $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función que admite transformada de Laplace.

Teorema 1.1 (Primer teorema de traslación) *Entonces*

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s)=F(s-a)$$

Teorema 1.2 (Segundo teorema de traslación) *Entonces*

$$\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a))(s)=e^{-as}F(s)$$

Teorema 1.3 (Derivadas de una transformada) *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua a trozos y de orden exponencial. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y $s > C + n$, se tiene que*

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t))(s)$$

Teorema 1.4 (Transformada de derivadas) *Sea $a \in \mathbb{R}$, y $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ que satisface la siguiente condición: f, f', $\ldots$, f^n son continuas a trozos y de orden exponencial (con las mismas constantes). Entonces se tiene*

$$\mathcal{L}(f^{(n)(t)})(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad s > C$$

Teorema 1.5 *Sean $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas a trozos y de orden exponencial. Entonces*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s)$$

donde $(f * g)(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$

P1. Calcule las siguientes transformadas de Laplace

(a) $\mathcal{L}(e^t cos(3t))(s)$

(b) $\mathcal{L}(t^2 cos^2(t))(s)$

(c) $\mathcal{L}(e^{2t}(t-1)^2)(s)$

(d) $\mathcal{L}(e^t U(t-5))(s)$

P2. Encuentre $f(t)$ si

(a) $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3 - 2s^2 - 8s}$

(b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + s - 20}$

(c) $F(s) = \dfrac{s-1}{s(s^2+1)}$

P3. La transformada de Laplace de la función $t^{-1/2} cosh(t)$ tiene la forma

$$I = h(s)\sqrt{s + \sqrt{s^2 - 1}}$$

Determine $h(s)$

P4. Usando transformada de Laplace resuelva la ecuación integral

$$y(t) = cos(t) + \int_0^t e^{-u} y(t-u) du$$

P5. Resuelva

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) - x_2(t) + e^t cos(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + x_2(t) + e^t sen(t) \\ \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0 \end{aligned}$$