MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2009-03

Profesor: Julio López

Auxiliar: Sebastián Reyes Riffo.

Pauta Control 1, MA2601 EDO (07/01/10)

P1. (i) (3 pts.) Muestre que la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y}{x} + x^m y^n f(\frac{y}{x})$$

se transforma en una ecuación de variables separables usando el cambio de variable $y = vx$.

Use la parte anterior para encontrar la solución de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{sec^2(y/x)}{y^2}$$

(ii) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) (1.5 pts.) $y^2dx + (x\sqrt{y^2 - x^2} - xy)dy = 0$

(b) (1.5 pts.) $y' = -\dfrac{x - 4y - 9}{4x + y - 2}$

SOLUCIÓN:

(i) Cambio de variable $y = vx$. Derivando c/r a x: $y' = v'x + v$. Luego, sustituyendo en la EDO

$$v'x + v = v + x^m(vx)^n f(v)$$

de donde

$$v' = x^{m+n-1}v^n f(v)$$

Asumiendo $v^n f(v) \neq 0$, se tiene

$$\frac{dv}{v^n f(v)} = x^{m+n+1}dx$$

.... (1.5 pts.)

Aplicando ahora a la EDO con $m = 0$, $n = -2$, y teniendo en cuenta que $v^{-2}\sec^2(v) \neq 0$ obtenemos:

$$\frac{dv}{v^{-2}\sec^2(v)} = x^{-3}dx,$$

el cual es equivalente a:

$$v^2\cos^2(v)dv = \frac{1}{x^3}dx$$

.... (0.3 pts.)

Integrando

$$\int v^2\frac{(1 + \cos(2v))}{2}dv = -\frac{1}{2x^2} + c$$

.... (0.3 pts.)

Luego de integrar por partes llegamos a:

$$\frac{v^3}{6} + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}v^2\mathrm{sen}^2(2v) - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2v) + v\cos(2v)) = -\frac{1}{2x^2} + c$$

Reemplazando el valor de $v = y/x$ obtenemos

$$\frac{(y/x)^3}{6} + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}(y/x)^2\mathrm{sen}^2(2y/x) - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2y/x) + y/x\cos(2y/x)) = -\frac{1}{2x^2} + c$$

.... (0.7 pts.)

(ii) (a) La EDO se puede escribir como:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2/x^2}{\sqrt{(y/x)^2 - 1} - y/x}$$

.... (0.2 pts.)

Cambio de variable: $v = y/x$, de donde $y' = v'x + v$. Luego

$$v'x + v = \frac{-v^2}{\sqrt{v^2 - 1} - v}$$

el cual es equivalente a:

$$v'x = \frac{-v\sqrt{v^2 - 1}}{\sqrt{v^2 - 1} - v}$$

.... (0.5 pts.)

Soluciones constantes: $v\sqrt{v^2 - 1} = 0$. Esto implica que $v = 0$ ó $v^2 - 1 = 0$, de esto último $v = \pm 1$. Por tanto, las soluciones constantes son:

$$y = 0, \quad y = -x, \quad y = x.$$

.... (0.3 pts.)

Asumiendo $v\sqrt{v^2 - 1} \neq 0$, tenemos

$$-\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}\right) dv = \frac{1}{x} dx$$

Integrando

$$-\ln(v) + \ln(v + \sqrt{v^2 - 1}) = \ln(cx)$$

el cual es equivalente a:

$$\frac{v + \sqrt{v^2 - 1}}{v} = cx$$

Sustituyendo el valor de $v = y/x$ se tiene

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - x^2}}{y} = cx$$

.... (0.5 pts.)

(b) Sean $L_1 : x - 4y - 9 = 0$ y $L_2 : 4x + y - 2 = 0$. Tales rectas no son paralelas.
Punto de intersección: $x_0 = 1$, $y_0 = -2$.

.... (0.2 pts.)

Cambio de variable: $\xi = x - 1$, $\eta = y + 2$, de donde $d\xi = dx$, $d\eta = dy$

.... (0.2 pts.)

Luego

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi - 4\eta}{4\xi + \eta} = -\frac{1 - 4\eta/\xi}{4 + \eta/\xi}$$

.... (0.2 pts.)

Sea $z = \eta/\xi$, entonces $\eta' = z'\xi + z$. Esto implica

$$z'\xi = -\frac{z^2 + 1}{z + 4}$$

.... (0.4 pts.)

Como $z^2 + 1 \neq 0$, tenemos:

$$\left(\frac{z}{z^2 + 1} + \frac{4}{z^2 + 1}\right) dz = -\frac{d\xi}{\xi}$$

Integrando:

$$\frac{1}{2}\ln(z^2 + 1) + 4\arctan(z) = -\ln(\xi) + c$$

Sustituyendo $z = \eta/\xi = (y + 2)/(x - 1)$ se obtiene:

$$\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y + 2}{x - 1}\right)^2 + 1\right) + 4\arctan\left(\frac{y + 2}{x - 1}\right) = -\ln(\xi) + c$$

.... (0.5 pts.)

P2. (a) Considere la ecuación diferencial

$$(7x^4y - 3y^8)dx + (2x^5 - 9xy^7)dy = 0$$

(i) (1 pto.) Determine m y n de modo que $\mu(x,y) = x^m y^n$ sea factor integrante.

(ii) (2 pts.) Encuentre su solución general, usando el factor integrante de la parte (i).

(b) Considere la siguiente ecuación de Ricatti:

$$y' = \frac{y^2}{(m+n)^2} - \frac{4mn}{(m+n)^2}y - (m-n)^2$$

(i) (1 pto.) Encuentre una solución particular constante.

(ii) (2 pts.) Encuentre la solución general.

SOLUCIÓN:

(a) Se tiene la ecuación diferencial

$$(7x^4y - 3y^8)dx + (2x^5 - 9xy^7)dy = 0$$

(i) multiplicando por el factor integrante, resulta:

$$\underbrace{(7x^{4+m}y^{n+1} - 3x^m y^{8+n})}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(2x^{5+m}y^n - 9x^{1+m}y^{7+n})}_{N(x,y)} = 0$$

Imponemos que la nueva ecuación diferencial sea exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \stackrel{!}{=} \frac{\partial N}{\partial x}$$

.... (0.3 pts.)

Luego calculamos $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 7(1+n)x^{4+m}y^n - 3(8+n)x^m y^{7+n} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2(5+m)x^{4+m}y^n - 9(1+m)x^m y^{7+n}\end{aligned}$$

.... (0.3 pts.)

A partir de lo anterior:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial x} \\ 7(1+n)x^{4+m}y^n - 3(8+n)x^m y^{7+n} &= 2(5+m)x^{4+m}y^n - 9(1+m)x^m y^{7+n}\end{aligned}$$

$$[7(1+n) - 2(5+m)]x^{4+m}y^n + [9(1+m) - 3(8+n)]x^m y^{7+n} = 0$$

Se concluye el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}7n - 2m &= 3 \\ n - 3m &= -5\end{aligned}$$

.... (0.3 pts.)

El cual tiene por solución $m = 2, n = 1$.

Así, el factor integrante es $\mu(x,y) = x^2y$

.... (0.1 pts.)

(ii) La nueva ecuación diferencial es

$$\underbrace{(7x^6y^2 - 3x^2y^9)}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{(2x^7y - 9x^3y^8)}_{N(x,y)} = 0$$

Ya que es exacta, $\exists E : \Omega \subset R^2 \to R$ tal que:

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \tag{1}$$
$$\frac{\partial E}{\partial y}(x,y) = N(x,y) \tag{2}$$
$$E(x,y) = k \tag{3}$$

para y fijo, integramos (1) sobre x:

$$E(x,y) = \int (7x^6y^2 - 3x^2y^9)dx + g(y) = x^7y^2 - x^3y^9 + g(y)$$

.... (0.5 pts.)

y derivando respecto a y, para luego usar (2) (1.0):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(x^7y^2 - x^3y^9) + g'(y) \\ N(x,y) &= 2x^7y - 9x^3y^8 + g'(y) \\ 2x^7y - 9x^3y^8 &= 2x^7y - 9x^3y^8 + g'(y) \end{aligned}$$

.... (1.2 pts.)

De lo que se determina $g(y) = k_1$.

Usando (3), se concluye:

$$\begin{aligned} x^7y^2 - x^3y^9 + k_1 &= k \\ x^7y^2 - x^3y^9 &= \overline{k} \end{aligned}$$

.... (0.5 pts.)

(b) Se tiene la ecuación de Ricatti

$$y' = \frac{y^2}{(m+n)^2} - \frac{4mn}{(m+n)^2}y - (m-n)^2$$

(i) Consideremos $y_p = k$, constante. Reemplazando en la ecuación la determinamos:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{k^2}{(m+n)^2} - \frac{4mn}{(m+n)^2}k - (m-n)^2 \\
0 &= k^2 - 4mnk - (m^2-n^2)^2 \\
k &= \frac{4mn \pm \sqrt{16m^2n^2 + 4(m^2-n^2)^2}}{2} \\
k &= 2mn \pm \sqrt{4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4} \\
k &= 2mn \pm \sqrt{m^4 + 2m^2n^2 + n^4} \\
k &= 2mn \pm \sqrt{(m^2+n^2)^2} \\
k &= 2mn \pm (m^2+n^2)
\end{aligned}$$

Así, se obtienen dos soluciones: $k_1 = (m+n)^2$, $k_2 = -(m-n)^2$.

.... (1.0 pts.)

(ii) Ya que es una EDO de Ricatti, usando como solución particular $y_p = (m+n)^2$ y el cambio de variable $y(x) = (m+n)^2 + \dfrac{1}{z(x)}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
z' - \left(\frac{4mn}{(m+n)^2} - \frac{2}{(m+n)^2}(m+n)^2\right)z &= -\frac{1}{(m+n)^2} \\
z' + \underbrace{\frac{2(m^2+n^2)}{(m+n)^2}}_{A}z &= -\frac{1}{(m+n)^2}
\end{aligned}$$

.... (1.2 pts.)

Esta última ecuación se puede resolver con factor integrante, el cual es e^{Ax} :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(ze^{Ax}) &= -\frac{e^{Ax}}{(m+n)^2} \qquad / \int dx \\
ze^{Ax} &= -\frac{e^{Ax}}{A(m+n)^2} + \bar{k} \\
z(x) &= -\frac{1}{2(m^2+n^2)} + \bar{k}e^{-Ax}
\end{aligned}$$

.... (0.6 pts.)

Finalmente, se encuentra $y(x)$

$$y(x) = (m+n)^2 + \frac{1}{\bar{k}e^{-Ax} - \frac{1}{2(m^2+n^2)}}$$

.... (0.2 pts.)

P3. (a) (2 pts.) Muestre que la solución de problema $y'' + 2y' = 0$, $y(0) = a$, $y'(0) = b$ tiende a una constante cuando $x \to \infty$. Encuentre dicha constante.

(b) (4 pts.) Un tanque de forma de un cilindro dispuesto en forma horizontal está inicialmente lleno de agua. La altura del cilindro es H_0 y el radio r. El tanque tiene un orificio en el fondo cuyo díametro es ρ. Se abre el orificio y el líquido cae libremente.

(i) (2 pts.) Encuentre la ecuación diferencial que describe el modelo.

(ii) (1 pto.) Solucione la ecuación diferencial.

(iii) (1 pto.) Sabiendo que $h(0) = 2r$, encontrar el valor de la constante de integración.

SOLUCIÓN:

(a) Usando el cambio de variable $u(x) = y'(x)$, resulta

$$u' + 2u = 0$$

ecuación cuyo factor integrante es e^{2x}. Al integrarla, se obtiene

$$u(x) = k_1 e^{-2x}$$

.... (0.6 pts.)

La condición inicial $y'(0) = b$ en términos de $u(x)$ es $u(0) = b$. Al imponerla, da como resultado $k_1 = b$. Reemplazando esto en la ecuación y volviendo a la variable original:

$$y'(x) = be^{-2x}$$

Integrando:

$$y(x) = -\frac{b}{2}e^{-2x} + k_2$$

.... (0.6 pts.)

Imponiendo la condición inicial $y(0) = a$, se obtiene $k_2 = a + \frac{b}{2}$. Finalmente, la solución es:

$$y(x) = -\frac{b}{2}e^{-2x} + a + \frac{b}{2}$$

.... (0.4 pts.)

Ya que $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x} = 0$ se tiene

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = a + \frac{b}{2}$$

.... (0.4 pts.)

(b) (i) Sea A_0 y A_T las areas transversales del orificio y del tanque respectivamente. Supongamos que el tanque esta lleno hasta una altura h. Por la ley de Torricelli tenemos:

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)},$$

con g la aceleración de la gravedad. La disminución del nivel del agua $h(t)$ con el flujo de salida viene dado por:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0}{A_T} v(t) = -\frac{A_0}{A_T}\sqrt{2gh(t)}.$$

Con los datos expuestos, tenemos las siguientes areas transversales:

$$A_0 = \pi(\frac{\rho}{2})^2,$$

$$A_T = 2xH_0,$$

donde H_0 el largo del cilindro horizontal y x el ancho el cual es variable en cada tiempo. Como r es el radio del cilindro, entonces

$$(x-0)^2 + (h-r)^2 = r^2, \quad \Rightarrow \quad x^2 + h^2 - 2rh + r^2 = r^2,$$

de donde

$$x = \sqrt{2rh - h^2}.$$

Con esto

$$A_T = 2\sqrt{2rh - h^2}H_0,$$

y así

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi\rho^2}{4\sqrt{2rh - h^2}H_0}\sqrt{2gh} = -\frac{\pi\rho^2}{4\sqrt{2r - h}H_0}\sqrt{2g}.$$

.... (2 pts.)

(ii) Luego,

$$\sqrt{2r - h}\, dh = -\frac{\pi\rho^2}{4H_0}\sqrt{2g}dt.$$

Esta ecuación tiene por solución:

$$\frac{2}{3}(2r - h)^{3/2} = \frac{\pi\rho^2}{4H_0}\sqrt{2g}\, t + c.$$

.... (1 pto.)

(iii) Teniendo en cuenta que $h(0) = 2r$, obtenemos el valor de $c = 0$.

.... (1 pto.)