MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2009-03
Profesor: Julio López
Auxiliar: Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 03
23/diciembre/2009

1. Ecuaciones exactas: factor integrante

Sea $\overline{M}(t,y)dt + \overline{N}(t,y)dy = 0$, tal que $\dfrac{\partial \overline{M}}{\partial y} - \dfrac{\partial \overline{N}}{\partial t} \neq 0$
Si multiplicamos por $\mu(t,y)$, la cual suponemos $C^1(\Omega)$, y definimos:

$$\begin{aligned} M(t,y) &= \mu(t,y)\overline{M}(t,y) \\ N(t,y) &= \mu(t,y)\overline{N}(t,y) \end{aligned}$$

se obtiene la ecuación $M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0$, la cual imponemos que es exacta, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial t} \\ \frac{\partial (\mu\overline{M})}{\partial y} &= \frac{\partial (\mu\overline{N})}{\partial t} \\ \mu\left(\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{N}}{\partial t}\right) &= \overline{N}\frac{\partial \mu}{\partial t} - \overline{M}\frac{\partial \mu}{\partial y} \end{aligned}$$

si consideramos $\mu(t,y) = \mu(t)$, se obtiene

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = \underbrace{\frac{1}{\overline{N}}\left(\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{N}}{\partial t}\right)}_{g(t,x)}$$

Si el lado derecho depende únicamente de t:

$$\mu(t) = Ce^{\int g(t)dt}$$

Y este procedimiento es análogo para $\mu(t,y) = \mu(y)$.

Resolver:

1. $(3t^2 - y^2)dy - 2tydt = 0$
2. $(ty - 1)dt + (t^2 - ty)dy = 0$
3. $e^t dt + (e^t cotg(y) + 2ycosec(y))dy = 0$
4. $(t + 2)sen(y)dt + tcos(y)dy = 0$
5. $(t^3 + ty^3)dt + 3y^2 dy = 0$

2. Ecuaciones reducibles a lineales

2.1. Ecuacion de Bernoulli

$$y' + p(t)y = q(t)y^n, \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$$

basta considerar el cambio de variable $z = y^{1-n}$, multiplicar la ecuación por $(1-n)y^{-n}$ y reemplazar, de lo cual resulta

$$z' + (1-n)p(t)z = (1-n)q(t)$$

que es una EDO lineal de primer orden.
Resuelva:

1. $ty' + y = t^2y^2$
2. $y' - 4yln(y) + 2ty(ln(y))^3 = 0$
3. $y' - 5y = -\frac{5}{2}ty^3$
4. $y' = -ty + ty^2$
5. $y' + (cot(t))y + \frac{1}{sen(t)}y^2 = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
6. $y' + ty^2 - (2t^2+1)y + t^2 + t - 1 = 0$