**MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.** Semestre 2009-03
**Profesor:** Julio López
**Auxiliar:** Sebastián Reyes Riffo.

**Clase auxiliar 02**
**21/diciembre/2009**

# 1. Ecuaciones Homogéneas

Dado $k \in \mathbb{N}$, se dice que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es **homogénea de grado** $k$ si $f(st, sy) = \pm s^k f(t, y)$.
El cuociente de dos funciones $f, g$ homogéneas de grado $k$ da por resultado:

$$\frac{f(t,y)}{g(t,y)} = \frac{f(t, t\cdot\frac{y}{t})}{g(t, t\cdot\frac{y}{t})} = \frac{\pm t^k f(1, \frac{y}{t})}{\pm t^k g(1, \frac{y}{t})} = h\Big(\frac{y}{t}\Big)$$

Consideremos la ecuación

$$y' = \frac{f(t,y)}{g(t,y)} = h\Big(\frac{y}{t}\Big)$$

y el cambio de variable $y = zt$, de lo que resulta:

$$z' = \frac{h(z) - z}{x}$$

que es una ecuación a variables separables.

Resolver:

1. $y' = \dfrac{y^2 + \beta t y}{y^2 + \alpha t y}$

# 2. Ecuaciones Exactas

Consideremos la ecuación diferencial

$$M(t,y) + N(t,y)y' = 0$$

Diremos que es *exacta* si

$$M(t,y) = \frac{\partial E}{\partial t}(t,y),\ N(t,y) = \frac{\partial E}{\partial y}(t,y),\ E(t,y) = k$$

**Teorema 1** *Sean $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $C^1(\Omega)$. La ecuación $M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0$ es exacta si*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \text{ en } \Omega$$

## 2.1. Resolución

Si la ecuación cumple el teorema, $\exists E : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t}(t,y) &= M(t,y) \quad (1) \\ \frac{\partial E}{\partial y}(t,y) &= N(t,y) \quad (2) \end{aligned}$$

para $y$ fijo, integramos (1) sobre $t$:

$$E(t,y) = \int M(t,y)dt + g(y)$$

y derivando respecto a $y$, para luego usar (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial y}(t,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(t,y)dt\Big) + g'(y) \\ N(t,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(t,y)dt\Big) + g'(y) \\ g'(y) &= \underbrace{N(t,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(t,y)dt\Big)}_{\text{independiente de t}} \end{aligned}$$

a partir de lo cual se encuentra $g(y)$

Finalmente, las soluciones se obtienen despejando $E(t,y) = k$

1. Verificar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas, para luego resolverlas:

   i. $(ye^{-t} - sen(t))dt - (e^{-t} + 2y)dy = 0$

   ii. $2y(y-1)dt + t(2y-1)dy = 0$

   iii. $2tydt + (t^2 - 1)dy = 0$

   iv. $(cos(t)sen(t) - ty^2)dt + y(1-t^2)dy = 0$

2. Determine $k$ tal que la ecuación sea exacta:

$$(2t - tsen(ty) + ky^4)dt - (20ty^3 + tsen(ty))dy = 0$$