

MA2001 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2009-3**Profesor:** Marcelo Leseigneur **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Víctor Verdugo**Auxiliar 8**

Miércoles 13 de Enero de 2010

P1. a) Sea $f(x, y) = xye^{x^2+2y^2}$. Encuentre un polinomio en dos variables $T(x, y)$ tal que satisfaga

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - T(x, y)}{x^4 + y^4} = 0$$

a) Sea $f(x, y) = x^3 - xy + \cos(\pi(x + y))$. Encuentre la expansión de Taylor de segundo orden, en torno al punto $(1, 1)$.

P2. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, convexo y no vacío. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) f es convexa
- b) $f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y)$, $\forall x, y \in D$
- c) $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$, $\forall x, y \in D$

Además, pruebe que si f es convexa, entonces x_0 es mínimo global para f si y solo si $\nabla f(x_0) = 0$.

P3. Considere una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 .

- a) Demuestre que si f tiene un mínimo local en x_0 , entonces la matriz Hessiana $H_f(x_0)$ es semidefinida positiva, es decir, $h^t H_f(x_0) h \geq 0$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$.
- b) Suponga ahora que f satisface la ecuación

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = -1$$

$\forall x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que f no puede tener un mínimo local en D .

P4. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Halle los extremos de f .