

MA2001 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2009-3

Profesor: Marcelo Leseigneur Auxiliares: Christopher Hermosilla y Víctor Verdugo

Auxiliar 11

Jueves 28 de Enero de 2010

P1. a) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Considere $f : (a, b) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que

$$I = \int_a^b \int_a^x f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_y^b f(x, y) dx dy$$

b) Deducir que si $f(x, y) = f(y, x)$ en el rectángulo $B = [a, b] \times [a, b]$ entonces

$$I = \frac{1}{2} \int \int_B f(x, y) dx dy$$

c) Pruebe que si $a > 0$ entonces

$$\int_0^a \int_x^a \frac{f(y)}{y} dy dx = \int_0^a f(x) dx$$

P2. Dado $\alpha \geq 1$ y una función continua $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definimos

$$I_\alpha(f)(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \forall x \geq 0$$

Muestre que si $\alpha, \beta \geq 1$ entonces

$$I_\alpha(I_\beta(f))(x) = C(\alpha, \beta) I_{\alpha+\beta}(f)(x)$$

donde $C(\alpha, \beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy$

P3. Calcule

a) $\int \int \int_A xyz dx dy dz$, donde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 ; x, y, z \geq 0\}$

b) $\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3} dx dy dz$

b) $\int \int_D x^2 y^2 dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2, x \leq y \leq 4x\}$

P4. Sea $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x + 2y + z \leq 1, y \geq |x|\}$. Calcule

a) $\int \int \int_E dx dy dz$

b) $\int \int \int_E y dx dy dz$