MA2001 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2009-3
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Víctor Verdugo

Pauta P2 Control 2

Jueves 14 de Enero de 2010

P2. *a)* Sea $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^n$, una curva suave, tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(t) \in \Sigma_c(\phi)$, $\forall t \in (-1,1)$. Luego, tenemos que

$$\phi(\gamma(t)) = c \ , \ \forall t \in (-1,1)$$

Derivando y evaluando en $t = 0$, queda

$$\nabla\phi(\gamma(0))^t \gamma'(0) = \nabla\phi(x_0)^t \gamma'(0) = 0$$

Dado que $\gamma'(0)$ es una dirección tangente a la superficie de nivel $\Sigma_c(\phi)$, y como $\gamma(\cdot)$ es cualquier curva con las condiciones dadas, se tiene que $\nabla\phi(x_0)$ es normal a $\Sigma_c(\phi)$ en x_0.

Sea P el plano tangente a la superficie de nivel en x_0. Como $\nabla\phi(x_0)$ es un vector normal a P, y $x_0 \in P$, entonces

$$x \in P \Leftrightarrow \langle \nabla\phi(x_0), x - x_0 \rangle = 0$$

Consideremos ahora $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$. Luego,

$$\Sigma_3(\phi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 3\}$$

Como $(1,1,1) \in \Sigma_3(\phi)$, y ϕ es diferenciable en $(1,1,1)$, (por ser suma de funciones diferenciables) tenemos que el plano tangente a $\Sigma_3(\phi)$ en $(1,1,1)$ está determinado por:

$$\begin{aligned} P &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle \nabla\phi(1,1,1), (x,y,z) - (1,1,1) \rangle = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (4,4,4), (x-1, y-1, z-1) \rangle = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4(x-1) + 4(y-1) + 4(z-1) = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 3\} \end{aligned}$$

b) Sea $u(x,t) = 3A \operatorname{sech}^3\left(\frac{\sqrt{A}}{2}(x - At)\right)$. Entonces:

i) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{9}{2}A^2\sqrt{A} \operatorname{sech}^3\left(\frac{\sqrt{A}}{2}(x-At)\right) \tanh\left(\frac{\sqrt{A}}{2}(x-At)\right)$$

ii) $$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\frac{9}{2}A\sqrt{A} \operatorname{sech}^3\left(\frac{\sqrt{A}}{2}(x-At)\right) \tanh\left(\frac{\sqrt{A}}{2}(x-At)\right)$$

iii) $$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,t) = -\frac{81}{8}A^2\sqrt{A} \operatorname{sech}^3\left(\frac{\sqrt{A}}{2}(x-At)\right) \tanh^3\left(\frac{\sqrt{A}}{2}(x-At)\right) + \frac{99}{8}A^2\sqrt{A} \operatorname{sech}^5\left(\frac{\sqrt{A}}{2}(x-At)\right) \tanh\left(\frac{\sqrt{A}}{2}(x-At)\right)$$