MA2001 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2009-3
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Víctor Verdugo

Auxiliar 9

Lunes 18 de Enero de 2010

i) **Teorema de la Función Inversa**

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Supongamos que para $a \in \mathbb{R}^n$, $Df(a)$ es invertible y $f(a) = b$. Entonces:

a) Existen abiertos $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $a \in U$, $b \in V$ y $f : U \to V$ es biyectiva.

b) Si $g : V \to U$ es la inversa de f, es decir, $g = f^{-1}$, entonces g es de clase C^1 y

$$Dg(b) = [Df(a)]^{-1}$$

ii) **Teorema de la Función Implícita**

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ una función de clase C^1, con Ω abierto, y $(a, b) \in \Omega$ tal que $f(a, b) = 0$. Digamos que $Df(a, b) = [D_x f(a, b)\ D_y f(a, b)]$ y supongamos que $D_y f(a, b)$ es invertible. Entonces existen conjuntos abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ y $W \subseteq \mathbb{R}^m$, con $(a, b) \in U$ y $a \in W$, tales que para cada $x \in W$ existe un único y tal que $(x, y) \in U$ y $f(x, y) = 0$. Esto define una función $g : W \to \mathbb{R}^n$, de clase C^1, que satisface

$$f(x, g(x)) = 0\ ,\ \forall x \in W$$

$Dg(x) = -[D_y f(x, g(x))]^{-1} D_x f(x, g(x))$ para todo $x \in W$, y $g(a) = b$.

P1. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^2. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto tal que $\nabla f(x_0) = 0$ y $H_f(x_0)$ es invertible. Demuestre que para todo $a \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, la función

$$f_a(x) := f(x) + ag(x)$$

posee al menos un punto crítico.

Indicación: Considere la función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(a, x) := \nabla f(x) + a\nabla g(x)$$

P2. Pruebe que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (s, t) = (x + \frac{1}{2}\arctan(y), y + \frac{1}{2}\arctan(x))$$

admite una inversa local f^{-1} de clase C^1 alrededor de todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Calcule la aproximación afín de f^{-1} en una vecindad de $(s_0, t_0) = f(0, 1)$.

P3. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

donde μ y σ son parámetros tales que $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Sea $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, y $L(\mu, \sigma) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$. Encuentre el máximo valor que puede tomar L en función de μ y σ.

P4. *a*) Encontrar el máximo y mínimo de $f(x, y, z) = x + 3y - 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b) El plano $x + y + 2z = 2$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ se intersectan en una elipse. Encontrar el punto más cercano y el más lejano de esta elipse al origen.