

MA2001 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2009-3

Profesor: Marcelo Leseigneur Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Víctor Verdugo

Auxiliar 8

Miércoles 13 de Enero de 2010

P3. Considere una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 .

- a) Demuestre que si f tiene un mínimo local en x_0 , entonces la matriz Hessiana $H_f(x_0)$ es semidefinida positiva, es decir, $h^t H_f(x_0) h \geq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Solución:

Como x_0 es un mínimo local, existe $B = B(x_0, \delta)$, con $\delta > 0$, tal que $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in B$. Sea $\phi(t) = f(x_0 + th)$. Luego, $\forall t$ tal que $x_0 + th \in B$, tenemos que $\phi(0) \leq \phi(t)$, y por regla de la cadena $\phi'(0) = \nabla f(x_0)^t h = 0$. Es decir,

$$0 \leq \phi(t) - \phi(0) - \phi'(0)t$$

Ocupando l'Hôpital, tenemos que:

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t) - \phi(0) - \phi'(0)t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi'(t) - \phi'(0)}{2t} = \frac{1}{2} \phi''(0)$$

y por lo tanto, $\phi''(0) \geq 0$. Por otro lado, como f es de clase C^2 , entonces

$$f(x_0 + th) = f(x_0) + t \nabla f(x_0)^t h + \frac{t^2}{2} h^t H_f(x_0 + \epsilon h) h$$

con $\epsilon \in (0, t)$. Usando que $\phi(t) = f(x_0 + th)$ y $\phi'(0) = \nabla f(x_0)^t h$, tenemos

$$\frac{\phi(t) - \phi(0) - \phi'(0)t}{t^2} = \frac{1}{2} h^t H_f(x_0 + \epsilon h) h$$

y con l'Hôpital nuevamente

$$\frac{1}{2} h^t H_f(x_0) h = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} h^t H_f(x_0 + \epsilon h) h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t) - \phi(0) - \phi'(0)t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi'(t) - \phi'(0)}{2t} = \frac{1}{2} \phi''(0)$$

Luego, $h^t H_f(x_0) h = \phi''(0) \geq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$, y por lo tanto $H_f(x_0)$ es semidefinida positiva.

- b) Suponga ahora que f satisface la ecuación

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = -1$$

 $\forall x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que f no puede tener un mínimo local en D .*Solución*

Supongamos que f tiene en $x_0 \in D$ un mínimo local. Luego, debería cumplirse lo probado en la parte a), es decir, $H_f(x_0)$ semidefinida positiva. Esto es, $\lambda_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, donde los λ_i corresponden a los valores propios de $H_f(x_0)$. Luego,

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}(H_f(x_0)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = -1$$

lo cual claramente es una contradicción, y por lo tanto f no posee mínimos locales en D .

P4. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Halle los extremos de f .

Solución

Primero, cabe destacar que como f es una función escalar, y D es compacto, entonces f alcanza efectivamente sus valores máximo y mínimo en D . Esto se probó en la Auxiliar 4. Para buscar estos puntos, separaremos el dominio, en $\text{int}(D)$ y $\text{Fr}(D)$.

$$i) \text{ int}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

Usamos la condición de primer orden, es decir $\nabla f(x) = 0$. Esto nos arroja las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 1 = 0$$

y por lo tanto hay un solo candidato, que corresponde al punto $x_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ahora, dado que

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y esta matriz es definida positiva, se satisface la condición suficiente de segundo orden, y por lo tanto x_0 es un mínimo local estricto, con $f(x_0) = \frac{1}{2}$.

$$ii) \text{ Fr}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Consideremos la parametrización de $\text{Fr}(D)$, dada por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$, y analizamos la función

$$g(t) = (f \circ \gamma)(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) - \cos(t) - \sin(t) + 1 = 2 - \cos(t) - \sin(t)$$

Usamos la condición de primer orden, es decir,

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(t) - \cos(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

Luego, estos ángulos nos entregan los candidatos en la frontera $x_1 = \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $x_2 = \gamma\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$. A estos dos puntos, debemos agregarle $x_3 = \gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$. Evaluando en estos tres puntos, obtenemos

$$f(x_1) = 2 - \sqrt{2}$$

$$f(x_2) = 2 + \sqrt{2}$$

$$f(x_3) = 1$$

Concluimos así, que f alcanza su mínimo global en el punto x_0 , con $f(x_0) = \frac{1}{2}$, y su máximo global en x_2 , con $f(x_2) = 2 + \sqrt{2}$.