MA2001 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2009-03
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Víctor Verdugo

Auxiliar 6

Miércoles 6 de Enero de 2010

P1. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y direccionales, y diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones:

i)

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución:

Dada una dirección d, hagamos el cambio $d = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Luego:
$f_1'((0,0);d) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f_1(0+td) - f_1(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{t(\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta)}{1 + cos\theta \operatorname{sen}\theta} = 0$
pues, el denominador no se anula en $[0, 2\pi]$. Por lo tanto, f_1 admite derivada direccional en $(0,0)$ para cualquier dirección d. De lo anterior, sigue que las derivadas parciales en el origen valen $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = 0$.
Para ver la diferenciabilidad de f_1 en el origen, notemos que el candidato a diferencial es 0. Luego, calculamos:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{|f_1((0,0) + (h_1,h_2)) - f_1(0,0) - 0|}{||h||} &= \lim_{h\to 0} \left| \frac{h_1^4 - h_2^4}{(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se obtiene haciendo el cambio a coordenadas polares, y notando que el denominador no se anulará en $[0, 2\pi]$. Luego, f_1 es diferenciable en el origen, y por lo tanto continua en el origen.

P4. *a)* Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Demostrar que f es diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si, existe una función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ continua en x_0, tal que $f(x) - f(x_0) = \langle g(x), x - x_0\rangle$.

Solución:

$\Rightarrow$) Si f es diferenciable en x_0, entonces $f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h\rangle + \epsilon(h)$, donde $\lim_{h\to 0} \dfrac{\epsilon(h)}{||h||} = 0$. Sea $h = x - x_0$, es decir, $f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle + \epsilon(x - x_0)$, con $\lim_{x\to x_0} \dfrac{\epsilon(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$. Llamemos $\dfrac{\epsilon(x - x_0)}{||x - x_0||} = \epsilon_1(x - x_0)$, y reescribiendo la relación anterior obtenemos que

$$f(x) - f(x_0) = \left\langle \nabla f(x_0) + \frac{(x - x_0)\epsilon_1(x - x_0)}{||x - x_0||}, x - x_0 \right\rangle$$

Probaremos que la siguiente función es continua:

$$g(x) = \begin{cases} \nabla f(x_0) + \dfrac{(x-x_0)\epsilon_1(x-x_0)}{||x-x_0||} & \text{si } x \neq x_0 \\ \\ \nabla f(x_0) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

En efecto, $\lim\limits_{x\to x_0} ||g(x)-g(x_0)|| = \lim\limits_{x\to x_0} ||\dfrac{(x-x_0)\epsilon_1(x-x_0)}{||x-x_0||}|| = \lim\limits_{x\to x_0} ||\epsilon_1(x-x_0)|| = 0$, y por tanto esa es la g que se buscaba.

$\Leftarrow$) Sea $g : \Omega :\to \mathbb{R}$ continua en x_0, tal que $f(x) - f(x_0) = \langle g(x), x - x_0\rangle$. Manipulando un poco la expresión se tiene que:

$$f(x) - f(x_0) = ||x-x_0|| \left\langle g(x) - g(x_0), \frac{x-x_0}{||x-x_0||} \right\rangle + \langle g(x_0), x - x_0\rangle$$

Llamando $\epsilon_1(x-x_0) = \left\langle g(x) - g(x_0), \dfrac{x-x_0}{||x-x_0||} \right\rangle$ tenemos que

$$f(x) - f(x_0) = \langle g(x_0), x-x_0\rangle + ||x-x_0||\epsilon_1(x-x_0)$$

y además $\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon_1(x-x_0) = 0$ (esto proviene de sandwich, Cauchy-Schwarz y la continuidad de g). Luego, que f es diferenciable en x_0 y $\nabla f(x_0) = g(x_0)$.