MA2001 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2009-03
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Víctor Verdugo

Auxiliar 6

Miércoles 6 de Enero de 2010

P1. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y direccionales, y diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones:

i)

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ii)

$$f_2(x,y) = \begin{cases} (3x^2 - 2y^2)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+3y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

iii)

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

P2. Considere el espacio vectorial de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, provisto de la norma $||(x,y)|| = \sqrt{||x||^2 + ||y||^2}$. Sea $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función bilineal, es decir, existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $B(x,y) = \langle L(x), y\rangle$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual en $\mathbb{R}^m$.

i) Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que $|B(x,y)| \leq C||x||||y||$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

ii) Demuestre que $\forall (x,y), (w,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, se tiene que $B((x,y) + (w,z)) = B(x,y) + B(x,z) + B(w,y) + B(w,z)$.

iii) Demuestre que B es continua para cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

iv) Desmuestre que B es diferenciable en cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y se tiene que $DB_{x_0,y_0}(w,z) = B(w, y_0) + B(x_0, z)$.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, tal que sus derivadas parciales satisfacen que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq K$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n}K||x - y||_2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

P4. *a*) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Demostrar que f es diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si, existe una función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ continua en x_0, tal que $f(x) - f(x_0) = \langle g(x), x - x_0\rangle$.

b) Muestre que la existencia de todas las derivadas direccionales de f en x_0 (según direcciones no nulas) no es una condición necesaria ni tampoco suficiente para que f sea continua en x_0.