

MA2001 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2009-03

Profesor: Marcelo Leseigneur Auxiliares: Christopher Hermosilla y Víctor Verdugo

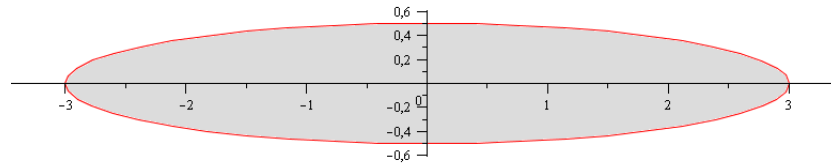
Pauta P2 Control 1

Miércoles 30 de Diciembre de 2009

P2. a) Determine la falsedad o veracidad de las siguientes aseveraciones en $\mathbb{R}^n$. Justifique en cada caso.1) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma, entonces $E = \text{int}(\text{adh } E)$.**Falso:** Basta tomar un $E \subset \mathbb{R}^n$ cerrado, pues $\text{int}(\text{adh } E) = \text{int}(E) \neq E$. Por ejemplo, consideremos $E = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, dotado de la norma $|\cdot|$. Claramente $\text{int}(\text{adh } E) = (0, 1) \neq [0, 1]$.2) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma, entonces $E = \text{adh}(\text{int } E)$.**Falso:** Basta tomar un $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto, pues $\text{adh}(\text{int } E) = \text{adh}(E) \neq E$. Por ejemplo, consideremos $E = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, dotado de la norma $|\cdot|$. Claramente $\text{adh}(\text{int } E) = [0, 1] \neq (0, 1)$.3) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma, entonces $E = \text{int } (E) \cup \partial E$ **Falso:** Consideremos $E = (0, 1] \subset \mathbb{R}$, dotado de la norma $|\cdot|$. Claramente $\text{int } (E) \cup \partial E = (0, 1) \cup \{0, 1\} = [0, 1] \neq (0, 1]$.4) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma, entonces $\text{int } (E^c) = (\text{adh } E)^c$ **Verdadero:** Probemos ambas inclusiones: $\subseteq$) Sea $x \in \text{int } (E^c)$. Luego, existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $B(x, \delta) \subset E^c$, es decir, $B(x, \delta) \cap E = \emptyset$. Tenemos así que x no es punto adherente a E y por lo tanto $x \in (\text{adh } E)^c$. $\supseteq$) Sea $x \in (\text{adh } E)^c$. Entonces, existe $\rho \in \mathbb{R}$, tal que $B(x, \rho) \cap E = \emptyset$, es decir, $B(x, \rho) \subset E^c$. Tenemos así que x es punto interior de E^c y por lo tanto $x \in \text{int } (E^c)$.b) 1) Dada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ y una matriz P no singular de $n \times n$. Demuestre que la función $N(x) = \|Px\|$ es también una norma de $\mathbb{R}^n$.i) Puesto que $\|\cdot\|$ es norma en $\mathbb{R}^n$, se tiene que $0 \leq \|Px\| = N(x) < +\infty$ ii) Debemos probar que $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. En efecto: $\Rightarrow$) Sea $N(x) = 0$. Luego $\|Px\| = 0$. Dado que $\|\cdot\|$ es norma, tenemos que $Px = 0$. Pero P es no singular, es decir, invertible, y por lo tanto $x = 0$. $\Leftarrow$) Sea $x = 0$. Luego $Px = 0$. Dado que $\|\cdot\|$ es norma, tenemos que $\|Px\| = 0$, y por lo tanto, $N(x) = 0$.iii) $N(\lambda x) = \|P(\lambda x)\| = \|\lambda(Px)\| = |\lambda|\|Px\| = |\lambda|N(x)$.iv) $N(x + y) = \|P(x + y)\| = \|Px + Py\| \leq \|Px\| + \|Py\| = N(x) + N(y)$.Luego, $N(\cdot)$ es norma.

- 2) Demuestre que en $\mathbb{R}^2$, la función $N_1(x, y) = \left[\frac{x^2}{9} + 4y^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ es una norma. Haga un dibujo del conjunto $B[(0, 0), 1]$.

Consideremos $\mathbb{R}^2$ dotado de la norma euclídeana, y la matriz $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, la cual es invertible, pues $|P| = \frac{2}{3} \neq 0$. Luego, $Px = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{3} \\ 2y \end{pmatrix}$, y por lo probado anteriormente, la función $N_1(x, y) = \|Px\|_2 = \left[\frac{x^2}{9} + 4y^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ es una norma. La bola es $B[(0, 0), 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + 4y^2 \leq 1\}$, y su frontera corresponde a una elipse de semiejes 3 y $\frac{1}{2}$ centrada en el origen:



- c) Para cada una de las siguientes funciones encuentre el grafo correspondiente. Para esto, puede ser utilidad dibujar las curvas de nivel.

Función	Grafo
$z = y \sen x$	II
$z = \cos \left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2} \right)$	IV
$2x + 3y + 4z = 0$	I
$z = y^3$	III
$z = x^2$	V
$z = x^2 + y^2$	VI