MA2001 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2009-03
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Víctor Verdugo

Auxiliar 4

Miércoles 30 de Diciembre de 2009

P1. *i*) Sea $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua y C compacto. Pruebe que $f(C) \subset \mathbb{R}^m$ es compacto.

ii) Sea $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y C compacto. Pruebe que existen $m, M \in C$ tales que $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$, $\forall x \in C$. En otras palabras, f alcanza su máximo y su mínimo sobre C.

iii) Sea $f : C \subset \mathbb{R}^n \to D \subset \mathbb{R}$ continua, biyectiva y C compacto. Pruebe que $f^{-1} : D \to C$ es continua.

P2. *i*) Sea $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función, y considere la función $g : C \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = ||f(x)||$, donde $||\cdot||$ es una norma en $\mathbb{R}^n$. Pruebe, que si f es continua en un punto a, entonces g también lo es.

ii) Sea $f : C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^2\}$, y definida por

$$f(x,y) = \left(\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x - y}, \frac{e^x - e^{-y}}{x + y} \right)$$

Verifique que f es continua en C y que se puede extender a todo $\mathbb{R}^2$ de manera que sea continua en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$.

iii) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \operatorname{sen} x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Verifique que f es continua en $\mathbb{R}^n$.

P3. Definición. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dirá Lipschitziana en A si existe una constante $k > 0$, llamada constante de Lipschtiz, tal que $||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y||$, $\forall x, y \in A$.

i) Pruebe que si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es Lipschitziana en A, entonces es continua en A.

Definición. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dirá contractante en A, si es Lipschitziana con constante de Lipschitz $k < 1$.

ii) ***Teorema del punto fijo de Banach***

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to A$ es contractante, y A cerrado, entonces existe un único $a \in A$ tal que $f(a) = a$. El elemento a, se llama punto fijo de f en A.