MA2001 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2009-03
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Víctor Verdugo

Solución Auxiliar 2

Miércoles 23 de Diciembre de 2009

P1. *Conjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$*

Sea $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia decreciente de compactos (ie, $C_{i+1} \subseteq C_i$), no vacíos, en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} C_i \neq \emptyset$.

Solución:

Su pongamos primero que existe un k a partir del cual $C_i = C_k$, $\forall i \geq k$. En este caso, tendremos que $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} C_i = C_k \neq \emptyset$. Si no ocurre esto, formamos una sucesión de modo que $x_n \in C_{n-1} \cap C_n^c$, cuando $C_n \subset C_{n-1}$ estrictamente, y $x_n = x_{n-1}$ si $C_n = C_{n-1}$. Luego, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_1$, y C_1 es cerrado y acotado (por ser compacto en $\mathbb{R}^n$), tenemos que la sucesión es acotada. Por Bolzano-Weierstrass, esta sucesión posee una subsucesión convergente que llamaremos $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, y x_0 a su límite. Probemos que $x_0 \in \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} C_i$. En efecto, dado que los C_i son cerrados $\forall i \in \mathbb{N}$, y $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \cap C_i$ sigue siendo una sucesión convergente a x_0, concluimos que $x_0 \in C_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, y entonces $x_0 \in \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} C_i$.

P2. *Desigualdad de Holder*

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $p, q \in \mathbb{R}$ Holder-conjugados, es decir, que $p \in [1, +\infty)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (cuando $p = 1$ considere $q = \infty$). Pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq ||x||_p ||y||_q$$

Para ello, puede serle útil probar primero que dados $a, b \geq 0$ y p, q Holder-conjugados, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Solución:

Probemos primero la indicación. Para ello, consideremos la función $ln(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, la cual es cóncava en todo su dominio. Luego, dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ y p, q Holder-conjugados, tendremos que:

$$\begin{aligned} ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) &\geq \frac{1}{p} ln(a^p) + \frac{1}{q} ln(b^q) \\ &= ln(a) + ln(b) \\ &= ln(ab) \end{aligned}$$

Como la función $exp(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente en todo su dominio, se concluye que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Ahora, separemos en casos:

i) $p = 1$ y $q = \infty$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| &\leq \max_{1\leq i\leq n} |y_i| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\
&= ||x||_1 ||y||_\infty
\end{aligned}$$

ii) $p, q \in \mathbb{R}$ Holder-conjugados:

Definamos $a_i = \dfrac{|x_i|}{||x||_p}$ y $b_i = \dfrac{|y_i|}{||y||_q}$, para $1 \leq i \leq n$. Usando la desigualdad probada previamente, tenemos que:

$$\begin{aligned}
a_i b_i &\leq \frac{a_i^p}{p} + \frac{b_i^q}{q} \\
\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^p}{p} + \frac{b_i^q}{q} \right) \\
\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i y_i|}{||x||_p ||y||_q} &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|^p}{p||x||_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q||y||_q^q} \right) \\
\frac{1}{||x||_p ||y||_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| &\leq \frac{1}{p||x||_p^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q||y||_q^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \\
&\leq \frac{1}{p||x||_p^p} ||x||_p^p + \frac{1}{q||y||_q^q} ||y||_q^q \\
&\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| &\leq ||x||_p ||y||_q
\end{aligned}$$