

MA2001 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2009-03

Profesor: Marcelo Leseigneur Auxiliares: Christopher Hermosilla y Víctor Verdugo

Auxiliar 2

Miércoles 23 de Diciembre de 2009

P1. Conjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$ i) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que las tres proposiciones siguientes son equivalentes:a) C es cerrado y acotado.b) Todo recubrimiento de C admite un subrecubrimiento finito; esto es, si $\Theta = \{\theta_i : i \in I\}$ es una familia de conjuntos abiertos tal que $C \subset \bigcup_{i \in I} \theta_i$, entonces existen $\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_k} \in \Theta$ tales que $C \subset \bigcup_{j=1}^k \theta_{i_j}$.c) Toda sucesión de puntos en C tiene alguna subsucesión convergente en C .Se dirá que $C \subset \mathbb{R}^n$ es *compacto* si verifica cualquiera de las condiciones anteriores.ii) Sea $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia decreciente de compactos (ie, $C_{i+1} \subseteq C_i$), no vacíos, en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i \neq \emptyset$.**P2. Desigualdad de Holder**Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $p, q \in \mathbb{R}$ Holder-conjugados, es decir, que $p \in [1, +\infty)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (cuando $p = 1$ considere $q = \infty$). Pruebe que

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Para ello, puede serle útil probar primero que dados $a, b \geq 0$ y p, q Holder-conjugados, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

P3. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$

i) Determinar el dominio y recorrido de las funciones:

a) $f_1(x, y) = \ln(4x + y - 5)$

b) $f_2(x, y) = \sqrt{2x - 3y + 4}$

c) $f_3(x, y) = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$

d) $f_4(x, y) = \arcsen(x + y)$

ii) Determine y bosqueje las curvas de nivel de las funciones:

a) $g_1(x, y) = y^2 - x^2$

b) $g_2(x, y) = x^2 + y^2$

c) $g_3(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

iii) Determine a cual de las funciones de la parte ii) corresponde cada una de las siguientes superficies:

