MA1002, Problemas propuestos control 1
Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliar: Benjamín Obando, Ayudante:Carlos Duarte

P1. *a*) Sea g una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que

$$g(x)\tan(x) \geq 0, \forall x \in \{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

Demuestre que g posee ceros en cada intervalo de la forma $\{k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ con $k \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto su derivada se anula infinitas veces.(Indicación: analice que sucede con el signo de $\tan(x)$).

b) Una función $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es derivable y su derivada h' es continua y ademas satisface que $h'(0) = -1$. Demuestre que existe $\delta > 0$ tal que:

$$\forall x \in (-\delta, \delta) \mid \{0\}, (h(x) - h(0))x < 0$$

c) Sea $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ una función continua tal que

$$f(1) = 1, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

La idea es probar que $f(x) = x$. Para esto se pide lo siguiente:

1) Pruebe que $f(0) = 0$, despues pruebe que $f(n) = n \forall n \in \mathbb{N}$ (por inducción) despues pruebe que $f(q) = q \forall q \in \mathbb{Q}$.
2) Usando la propiedad de densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y la continuidad de la funcion f concluya lo pedido
Indicación: La propiedad de densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ se traduce en que $\forall x \in \mathbb{R} \exists (y_n) \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $y_n \to x$.

P2. Una función f es tal que $f'(x) = \frac{ax+b}{(x-1)(x+4)}$

a) Calcule los valores de a y b sabiendo que en $x_0 = 2$ es un punto de inflexión de f y $f'(x_0) = -1$.

b) Mediante el análisis de signos de f' y f'' determine zonas de decreciemiento, crecimiento, convexidad y concavidad. Con esta informacion relaice un bosquejo de la función f.

P3. *a*) Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pruebe que f es diferenciable en $\mathbb{R}$.

b) Considere la función g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{\sin(x)} & \text{si } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ C & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Determine C de modo que g sea continua en 0.
2) Calcule $f'(0)$ por definición. Comente acerca de la continuidad de g' en 0.