

MA1002, Problemas Propuestos Control 2
Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliar: Benjamín Obando, Ayudante: Carlos Duarte

- P1.** a) Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$ tal que $f(0) = 0$ y $\forall x \in (0, 1) \ 0 \leq f'(x) \leq 1$.

Se pide probar que: $[\int_0^x f(t)dt]^2 \geq \int_0^x f(t)^3 dt$.

- 1) Pruebe que $\forall x \in [0, 1] \ f(x) \geq 0$
- 2) Defina $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$G(x) = 2 \int_0^x f(t)dt - f(x)^2$$

Muestre que G es creciente y deduzca que $\forall x \in [0, 1] \ G(x) \geq 0$

- 3) Defina $F(x) = [\int_0^x f(t)dt]^2 - \int_0^x f(t)^3 dt$. Pruebe que $F'(x) = f(x)G(x)$, establezca el crecimiento de F y deduzca que $F(x) \geq 0 \ \forall x \in [0, 1]$.
Concluya.

- b) Sea $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable tal que cumple la relación:

$$y(t) = \cos(t) + \int_0^t y(t-x)x dx$$

Pruebe que y satisface la ecuación diferencial:

$$y''(t) = -\cos(t) + y(t)$$

- P2.** a) Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e(x^2 - \pi^2) + \pi \int_0^{\pi^2} \frac{e^{\sin(\frac{1}{2}\sqrt{t})}}{\sqrt{t}}}{1 + \cos x}$$

- b) Usando el cambio de variables $u = \tan(x/2)$ resuelva la integral:

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x) + 1} dx$$

- c) Sea $f(x) = -6x^2 + 5x + 1$. Considere sobre la parábola el punto $(a, f(a))$ $a \geq 0$.
Demuestre que el área comprendida entre la parábola y el segmento que une $(0, 1)$ con $(a, f(a))$ es igual a $A = a^3$