MA1002, Auxiliar 9
Cálculo Diferencial e Integral
19 de enero, 2010
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliar: Benjamín Obando

P1. Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int\limits_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$.

P2. Estudie la convergencia de la integral impropia

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$$

para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}^* \cup \{0\}$.

P3. Sea f una función continua y de orden exponencial, es decir, existen cosntantes M, c y τ tal que

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \forall t \geq \tau$$

Se define la transformada de Laplace de f como:

$$F(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt$$

Pruebe que:

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$$

P4. Calcule el valor de las siguientes series.

a) $\sum \frac{4}{(4k-3)(4k+1)}$.

b) $\sum \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

c) $\sum \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}}$.

P5. Demostrar que las siguientes series divergen.

a) $\sum k^2$.

b) $\sum \cos(k\pi)$.

c) $\sum k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

d) $\sum k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$.

e) $\sum \frac{k!}{2^k}$.

f) Para $a \in \mathbb{R}$, $\sum \left(1+\frac{a}{k}\right)^k$.

P6. Aplicar el álgebra de series para estudiar la convergencia de las siguientes series.

a) $\sum \left(\frac{5}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)$.

b) $\sum \left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{5^k}\right)$.

P7. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum(1-\cos(\frac{1}{n}))$ y $\sum(1+\cos(\frac{1}{n}))$

b) $\sum(-1)^n \sin(\frac{1}{n})$

c) $\sum \frac{1}{n(\ln(n))(\ln(\ln(n)))^2}$

d) $\sum \frac{\sin(1+ln(n!))}{\sqrt{n^4+n+1}}$

P8. Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

a) Usando sumas de Riemann calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n\sqrt{n}}$.

b) Estudiar la convergencia de las series $\sum a_n$, $\sum \frac{1}{a_n}$,$\sum(-1)^n a_n$ y $\sum \frac{(-1)^n}{a_n}$

c) Determine todos los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los que la serie $\sum \frac{a_n}{n^p}$ es convergente.

P9. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(\ln(n))}}$$

Para esto pruebe que $x^{\ln(x)} \leq e^x$ y luego concluya.

P10. *a*) Demuestre que para todo número real p, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{pn}}{n!}$ converge .

b) Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!}$.