

MA1002, Auxiliar 7
Cálculo Diferencial e Integral
12 de enero, 2010
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliar: Benjamín Obando

P1. Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ de forma tal que $z(\theta) = \theta$ donde (r, θ, z) son las coordenadas cilíndricas.

- a) Encuentre una parametrización de la curva Γ descrita por la partícula (use a θ como parámetro).
- b) Calcule la longitud de arco para $\theta \in [0, 2\pi]$.
- c) Calcule la parametrización natural o en longitud de arco para Γ .
- d) Calcule el vector tangente, el normal y el binormal asociado a Γ , así como su curvatura y su torsión.

P2. Sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2} \quad h > 0 \quad (1)$$

de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{d\theta} = z \quad z(0) = h \quad (2)$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

- a) Encuentre una parametrización para Γ y bosqueje la curva .
- b) Encuentre la longitud de arco s y una expresión para la parametrización en longitud de arco de Γ .
- c) Calcule la rapidez , el vector velocidad, tangente, normal y binormal .
- d) Calcule la curvatura (κ) y la torsión (τ).
- e) Verifique que

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

P3. Parametrizar la curva plana cuyos puntos satisfacen lo siguiente: el producto de las distancias a dos focos en la abscisa $(A, 0)$ y $(-A, 0)$ es constante e igual a $B > 0$. (Lemniscata).

P4. Considere la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$. Calcule su triedro de Frenet, $\kappa(t)$ y $\tau(t)$. Estudie el comportamiento de κ y τ cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

P5. Sea la hélice descrita por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(t) \\ y(t) &= a \sin(t) \\ z(t) &= at \tan(\alpha) \end{aligned}$$

donde α , a constantes y $a > 0$. Se pide:

- (i) Hallar los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$ en función del parámetro t .
- (ii) Probar que $\hat{T}$ y $\hat{B}$ forman un ángulo constante con el eje $\hat{z}$ y que $\hat{N}$ es perpendicular a éste eje y dirigido hacia el.
- (iii) Probar que la curvatura κ y la torsión τ quedan expresadas por:

$$\kappa = \frac{\cos^2 \alpha}{a}$$

$$\tau = \frac{-\sin \alpha \cos \alpha}{a}$$

P6. Una partícula se mueve describiendo una trayectoria Γ sobre el manto del cono $x^2 + y^2 = z^2$, de forma tal que su altura z y el ángulo en cilíndricas cumplen la relación $z = e^{-\theta}$ con $\theta \in [0, +\infty)$.

- (a) Encuentre una parametrización de Γ . Dibuje la curva.
- (b) Calcule el largo de Γ .
- (c) Hallar los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$ en función del parámetro θ .

P7. Considere la curva Γ que se obtiene como intersección de las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, donde $a > 0$.

- a) Encuentre una parametrización para Γ .
- b) Suponga que Γ es un alambre con densidad de masa $\rho(x, y, z) = \frac{2a}{\sqrt{8a^2 - x^2 - y^2}}$. Calcule la masa del alambre.

P8. Sea Γ la curva definida por la intersección de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$. Calcular la integral de línea $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si $\vec{F}$ es el campo vectorial definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + z)\vec{i} + (y^2 + x)\vec{j} + (z^2 + y)\vec{k}$$