

MA1002, Tarea 5  
Cálculo Diferencial e Integral  
Profesor : Raúl Uribe  
Auxiliar: Benjamín Obando, Ayudante: Carlos Duarte

**P1.** Encuentre una parametrización para cada una de las siguientes curvas:

- a) Elipse:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .
- b) Hipérbola:  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ .
- c) Curva de Lamé:  $x^4 + y^4 = 1$ .
- d) Cúbica nodal:  $y^2 = x^2(x + 1)$ . (INDICACIÓN: Use el parámetro  $t = \frac{y}{x}$ )
- e) Ocho de Lissajous:  $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$ . (INDICACIÓN: Use el parámetro  $t = \arcsin(x)$ )
- f) El cuadrado  $|x| + |y| = 1$ .
- g) El triángulo de vértices  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  y  $(0, 0, 3)$ .
- h) La lenteja formada por las ecuaciones  $x = y^2$ ;  $y = x^2$ ;  $x, y \geq 0$ , recorrida en sentido anti-horario.
- i) una partícula que se mueve sobre el manto del paraboloides invertido de ecuación  $x^2 + y^2 = -z$  de manera que la altura  $z$  y el ángulo  $\theta$  en cilíndricas cumplen la relación  $z(\theta) = -e^{-2\theta}$ ,  $\theta \geq 0$ .

**P2.** Parametrizar las siguientes curvas:

- a) Una recta gira en torno al punto  $O$  con una velocidad angular  $w$  barriendo un plano. El punto  $P$  se mueve por la recta con una velocidad proporcional a la distancia  $|\overrightarrow{OP}|$ . Encontrar la ecuación de la línea descrita por el punto  $P$  (*espiral logarítmica*).
- b) Una recta, no perpendicular al eje  $\hat{z}$ , gira uniformemente en torno al origen  $O$  con velocidad angular  $w$ . El punto  $P$  se mueve por la recta con velocidad constante. (*hélice cónica*).
- c) Una recta, no perpendicular al eje  $\hat{z}$ , gira uniformemente en torno al origen  $O$  con velocidad angular  $w$ . El punto  $P$  se mueve por la recta con velocidad proporcional a la distancia  $|\overrightarrow{OP}|$ . (*espiral cónica*).

**P3.** Hallar la longitud de arco de la primera vuelta de la espiral de Arquímedes definida en polares por la ecuación  $r = a\theta$ .

**P4.** Dibuje y calcule la longitud de arco y la curvatura de las curvas descritas por las siguientes parametrizaciones:

- a) Catenaria:  $\vec{r}(t) = (t, \cosh t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- b) Espiral logarítmica:  $\vec{r}(t) = (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , donde  $a, b \neq 0$ .
- c) Parábola semicúbica, o cuspidal:  $\vec{r}(t) = (\frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**P5.** Considere las siguientes curvas:

- a)  $\alpha(t) = (\sinh t, \cosh t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- b)  $\beta(t) = (t, \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, t^3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

c)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cosh t), t \in \mathbb{R}$ .

(i) Para las tres calcule la longitud de arco, la curvatura y la torsión.

(ii) Para  $\alpha$  y  $\gamma$  encuentre la parametrización en longitud de arco.

(iii) Para  $\beta$  calcule el triedro de Frenet.

**P6.** Considere la curva  $\gamma(t) = (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t), 0), t \in \mathbb{R}$ , donde  $a > 0$  y  $b < 0$ . Pruebe que cuando  $t \rightarrow \infty$  tiende a  $(0, 0)$  describiendo una espiral. Y también que  $\gamma'(t) \rightarrow (0, 0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Verifique que la curva tiene longitud finita, es decir:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \|\gamma'(\tau)\| d\tau < +\infty$$

**P7.** Hallar los puntos sobre la curva  $\Gamma$  descrita por las ecuaciones paramétricas  $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = \cos t$  en los cuales la curvatura  $\kappa$  presenta un valor mínimo.

**P8.** Hallar el valor de la integral de línea  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  del campo vectorial  $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que une el origen de coordenadas con el punto  $(1, 1, 1)$  y que esta definida por la intersección de las superficies de ecuaciones  $y = x^2, z = x^3$ .

**P9.** Sea  $\Gamma$  la curva que se obtiene al intersectar la superficie  $z = x^2 + y^2$  con la esfera unitaria.

a) Dibuje la curva  $\Gamma$ .

b) Encuentra una parametrización para la curva  $\Gamma$ .

c) Verifique la regularidad. Encuentre la Velocidad y el Vector Tangente de la parametrización.

**P10.** (*Cardioide*)

Considere la curva plana  $\Gamma$  descrita por la siguiente ecuación en coordenadas polares

$$\rho = a(1 - \cos(\theta)) \quad a > 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

a) Encuentre una parametrización para  $\Gamma$ . Grafique esta parametrización y encuentre sus posibles irregularidades.

b) Calcule el largo de  $\Gamma$

**P11.** Dibujar calcular el área encerrada por las siguientes curvas descritas en coordenadas polares.

a)  $\rho(\theta) = 2 \cos \theta, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ .

b)  $\rho(\theta) = 2 + \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**P12.** Sea  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(0) = 0$  y la longitud de la curva entre 0 y  $x$  es  $x^2 + 2x - f(x)$ .

a) Determinar  $f$ .

b) Calcular el área bajo la curva  $y = f(x)$  y la longitud entre 0 y 1.

**P13.** Determinar el área del manto sólido engendrado al rotar, en torno al eje  $OY$ , el trozo de la curva  $y = \frac{x^2}{2}$ , comprendido entre 0 y 1.

**P14.** Considere la espiral de ecuación paramétrica  $x(t) = e^{2t} \cos(t), y(t) = e^{2t} \sin(t)$ .

a) Encuentre el largo  $L$ , de la curva obtenida al variar el parámetro  $t$ , desde 0 hasta  $2\pi$ .

b) Encuentre  $t_0$  tal que, la longitud de la curva obtenida al variar el parámetro  $t$ , desde 0 a  $t_0$  sea igual a la mitad del largo  $L$ , obtenido en la parte anterior.