MA1002, Tarea 4
Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliar: Benjamín Obando,Ayudante:Carlos Duarte

P1. Sea $I_{m,n} = \int_0^1 x^n(1+x)^m dx$. Demuestre que se satisface:

$$(m+1)I_{m,n} + nI_{m+1,n-1} = 2^{m+1}$$

P2. Sea $G(x) = \int_0^1 e^{-|x-y|} f(y)dy$. Calcule $G'(x)$

P3. Calcule las siguientes primitivas:

a) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

b) $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$

d) $\int \sin^2(x)dx$

e) $\int \frac{1}{e^{3x}\sqrt{1-e^{-2x}}} dx$

f) $\int \cos(\ln(x))dx$

P4. Calcule las siguientes recurrencias:

a) $I_n = \displaystyle\int \frac{x^n}{1+x^2} dx$

b) $J_n = \displaystyle\int \sec^n(x)dx$

c) $K_n = \displaystyle\int e^{\alpha x} x^{-n} dx$

d) $L_n = \displaystyle\int \tan^n(x)dx$

P5. Para $p, q \in \mathbb{N}^*$, se define $I(p,q) = \int\limits_0^1 x^p(1-x)^q dx$ y $I(p,0) = \int\limits_0^1 x^p dx$.

(a) Demuestre que $I(p+1,q) = \frac{p+1}{q+1} I(p,q+1)$.

(b) Muestre que $I(p,q) - I(p+1,q) = I(p,q+1)$ y deduzca que $I(p,q+1) = \frac{q+1}{p+q+2} I(p,q)$.

(c) Calcule $I(p,0)$ y concluya que $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

P6. para $n \geq 1$ natural definimos $I_n = \int\limits_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x dx$.

(a) Calcule I_1.

(b) Muestre que para todo $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

(c) Deduzca que para todo $n \geq 2$, $I_n = e^2 - (1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!})$.

P7. Usando el método de las fracciones parciales calcule:

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$$

P8. Usando el cambio de variables $u = \tan(x/2)$, calcule $\cos(x), \sin(x), dx$ en función de u, y resuelva la integral:

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x) + 1} dx$$