

MA1002, Auxiliar 4
Cálculo Diferencial e Integral
29 de Diciembre, 2009
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliar: Benjamín Obando

P1. Usando sumas de Riemann pruebe que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y $f \geq 0$, entonces f^2 es integrable en $[a, b]$

P2. Considere la función $f(x) = x \ln x$ en el intervalo $[1, 2]$. Para $n \in \mathbb{N}$ se define la partición $P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ para el intervalo $[1, 2]$ mediante la regla $x_i = q^i$ para $i \in \{0, \dots, n\}$

a) Determine el valor de q tal que $x_n = 2$, calcule la norma de la partición P_n y demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n| = 0$

b) Usando la partición P_n calcule S_n .

c) Calcule $\int_1^2 f(x) dx$.

P3. Sea $x > 0$, demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} e^{px/n} = \frac{e^x - 1}{x}$$

Indicación: Si $x > 0$, entonces $\int_0^x e^t dt = e^x - 1$.

P4. Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots + \frac{1}{(n+n)^3} \right)$.

P5. Demuestre que:

$$\left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin x}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{\pi}{12e}$$

P6. Calcular las siguientes primitivas

a) $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)} dx$

b) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$

c) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx$

P7. Calcule la primitiva

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2 + (\sqrt{1+x^2})^3}} dx$$

P8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable, con derivada continua. Si $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ son tales que $f(a) = f(b) = 0$ y $\int_a^b f^2 = 1$. Demuestre que:

$$\int_a^b x f(x) f'(x) = -1/2$$

P9. Demuestre que $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$ satisface la recurrencia:

$$(1 + 2n)I_n = (2x^n \sqrt{1+x}) - 2nI_{n-1}$$

P10. Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$$

P11. Calcular la primitiva

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx$$

P12. Sea g una función dos veces derivable en \mathbb{R} . Se define la función f mediante la regla

$$f(x) = \int_0^x g(x-t) \sin(t) dt$$

Demostrar que se verifica la relación $f''(x) + f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

P13. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 2}}$$

- a) Demostrar que f es impar.
- b) Estudiar el crecimiento de f .