MA1002, Tarea 3
Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliar: Benjamín Obando,Ayudante:Carlos Duarte

P1. Calcule las siguientes Sumas de Riemann:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k \sinh(k/n)$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} (k\sqrt{n^2-k^2})$.

P2. Determinar el limite cuando n tiende a $+\infty$.

a) $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

b) $T_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{k+n}$.

c) $U_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+4k/n}}$.

P3. Sea $f : [1, n) \to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente.

a) Usando la partición $P = \{1, 2, ..., n\}$ pruebe que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i) \quad \forall n \geq 2$$

b) Considere $f(x) = \ln(x)$, demuestre que:

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n! \quad \forall n > 0$$

P4. Dada la partición $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[1, e]$ con $x_k = e^{\frac{k}{n}}$ y la función $f(x) = \ln x$. Calcular

a) $S(f, \mathcal{P})$ y $s(f, \mathcal{P})$.
Indicación: $\sum\limits_{k=1}^{n} ka^k = \frac{1}{1-a} \left\{ 1 - (n+1)a^n + \frac{a(1-a^n)}{1-a} \right\}$.

b) Concluya que f es integrable en $[1, e]$ y calcule $\int\limits_1^e \ln(x)dx$.

P5. Sean f y g dos funciones reales, integrables en un intervalo cerrado $[a, b]$.

a) Pruebe que el producto $f \cdot g$ es integrable en $[a, b]$.

b) Pruebe que si $|f(x)| \geq c$, $\forall x \in [a, b]$ con $c > 0$, entonces el cuociente f/g es integrable en $[a, b]$.

P6. Sea f una función derivable en $[a, b]$ y tal que $|f'(x)| \leq K$ $\forall x \in [a, b]$.

a) Use el teorema del valor medio para deducir que:

$$\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{[a,b]} \quad S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) \leq K\|\mathcal{P}\|(b-a)$$

b) Demuestre que f es integrable en $[a,b]$.

c) Verifique que $\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}[S(f,\mathcal{P}) + s(f,\mathcal{P})] \right| \leq \frac{1}{2}K\|\mathcal{P}\|(b-a)$$

P7. *a*) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable en el intervalo $[a,b]$. Compruebe que $-f$ también es integrable, y que:

$$\int_a^b -f = -\int_a^b f$$

b) Sean f, g dos funciones acotadas en $[a,b]$. Se sabe que f es integrable en $[a,b]$ y que para cierto punto $c \in [a,b]$,

$$g(c) \neq f(c)$$
$$g(x) = f(x), \forall x \in [a,b] \setminus c$$

Pruebe que:

$$\int_a^b f = \int_a^b g$$

P8. Pruebe que $f(x) = \ln(x)$ es integrable en $[1,2]$, use la partición siguiente: $P = \left\{1, \frac{n+1}{n}, ..., \frac{n+n}{n} = 2\right\}$.

P9. Considere la sucesión $a_n = \int_0^n q^x dx$, con $0 < q < 1$.

a) Explique porqué (a_n) está bien definida, es decir, porqué q^x es Riemann integrable en $[0,n]$, y muestre que es estrictamente creciente.

b) Calcule las sumas de Riemann inferior y superior para q^x y la partición $P = \{0,1,...,n\}$.

c) Utilice las sumas para obtener las siguientes cotas para (a_n).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ q\frac{1-q^n}{1-q} < \int_0^n q^x dx < \frac{1}{1-q}$$

d) Concluya que (a_n) converge y que $a = \lim a_n$ satisface:

$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}$$

P10. Sea f impar e integrable en $[-a,a]$.

a) Pruebe que:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

b) Sea $g(x) = \frac{1+x^3}{\cos^2 x}$ en $[-\pi/4, \pi/4]$. Calcule:

$$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} g(x)\, dx$$

P11. Sea $F(x) = \int_0^x (u-x)f'(u)du$, con f' integrable. Pruebe que:

$$F'(x) = f(0) - f(x)$$

P12. Demuestre que si f es T-periódica e integrable, entonces:

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$$