CONTROL 1: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

PROFESOR: RAÚL URIBE
AUXILIAR: EMILIO VILCHES
23 DE DICIEMBRE DE 2008

P1. a) Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 1) Estudiar la continuidad de f para $x \neq 0$.
 - 2) Demostrar, usando la definición de continuidad, que f es continua en $x = 0$.
 - 3) Demostrar que f es diferenciable en $x \neq 0$.
 - 4) Demostrar que f no tiene derivada en 0.
- b) Suponga que f y g son continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$.

P2. a) Demostrar que existe algún número x tal que

- 1) $x^{179} + \frac{163}{1+x^2+\sin^2 x} = 119$.
- 2) $\sin x = x - 1$

b) Calcular las siguientes derivadas:

- 1) $y = \sqrt[3]{1 + \arctan \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- 2) $y = \arctan \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\sec x}$.

c) Sean $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones crecientes y derivables de signo constante: $g(x) < 0$ y $h(x) > 0$. Determinar para qué valores de x , la función f siguiente, es creciente o decreciente:

$$f(x) = g(b - ax^3)h(\arctan(cx)) \quad a, b, c > 0$$

P3. a) Sea f continua en $[0, +\infty)$, diferenciable en $(0, \infty)$, tal que $f(0) = 0$ y f' es creciente en $\mathbb{R}^+$.

- 1) Use el teorema del valor medio, para probar que $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ para todo $x > 0$.
- 2) Deduzca que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $\mathbb{R}^+$.

b) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

- 1) Encontrar los ceros, mínimos, máximos, puntos críticos y puntos de inflexión de f .
- 2) Estudiar las asíntotas y bosquejar el gráfico de f .