MA1002, Auxiliar 2
Cálculo Diferencial e Integral
17 de Diciembre, 2009
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliar: Benjamín Obando

P1. Demostrar que la ecuación $\tan x = x$ tiene una infinidad de raíces reales.

P2. Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Demostrar que existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

P3. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq |x|$. La idea del problema es demostrar que f tiene un mínimo global.
es decir:

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(a) \leq f(x)$$

Para esto, proceda como sigue:

- (a) Sea $I = [-f(0), f(0)]$. Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus I, f(x) > f(0)$
- (b) Concluya que f tiene un mínimo global (en todo $\mathbb{R}$).

P4. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Demuestre que si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función par y derivable, entonces g' es una función impar.

P5. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $|f(x) - f(y)| \leq a(x - y)^2$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$. Pruebe que $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existe y $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

P6. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

- a) Encontrar los ceros, mínimos, máximos, puntos críticos y puntos de inflexión de f .
- b) Estudiar las asíntotas y bosquejar el gráfico de f .

P7. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $[a, b]$ y tal que $f(a) = f(b) = 0$, con $0 < a < b$. Demuestre que existe $c \in]a, b[$ tal que: $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$. Ind. Utilice la función auxiliar $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

P8. Usando el TVM, demuestre que:

$$1 + \ln x < (x + 1) \ln(x + 1) - x \ln x < 1 + \ln(x + 1), \quad \forall x > 0$$

Deduzca que:

$$n \ln n - (n - 1) \leq \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n < (n + 1) \ln(n + 1) - n, \quad \forall n \geq 1$$