MA1002, Tarea 2
Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliar: Benjamín Obando

P1. Un conductor demora 5 horas en recorrer los (aproximadamente) 500 kms. que separan Santiago y Concepción. Pruebe que existe un tramo del viaje, de una longitud de 100 kms., que es recorrido en exactamente 1 hora.

P2. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas f, hallar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n + 1$.

a) $f(x) = x^3 - x + 3$.
b) $f(x) = x^3 - 3x + 3$.
c) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.
d) $f(x) = x^5 + x + 1$.

P3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones

a) $y = x^5(a + 3x)^3(a - 2x)^2$.
b) $y = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$.
c) $y = \arcsin(\sqrt{\sin x})$.
d) $y = \arctan(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}})$, $(0 \leq x < \pi)$.
e) $y = \arctan \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$.
f) $y = \arccos(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1})$.
g) $y = \arcsin(\sin x)$.
h) $y = \ln\left(\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right) + 2\arctan \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.
i) $y = x^{\arcsin x}$.
j) $y = \sin(x^{\cos x}) + \cos(x^{\sin x})$.
k) $y = \sqrt[n]{\frac{x-tgx}{x+\sec x}}$.
l) $y = \arcsin(\frac{3\sin x}{4+5\cos x})$.

P4. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pruebe que f es diferenciable en $\mathbb{R}$.

P5. Calcular por definición la derivada de la siguiente función

$$f(x) = \frac{2+x}{3-x}$$

P6. Demuestre que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene la siguiente desigualdad.

$$\frac{|\ x-y\ |}{1+|\ x-y\ |} \leq \frac{|\ x-z\ |}{1+|\ x-z\ |} + \frac{|\ z-y\ |}{1+|\ z-y\ |}$$

Indicación: Analice las propiedades de la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

P7. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen lo siguiente:

a) $g(x) = xf(x) + 1$ y $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

b) $g(a+b) = g(a)g(b)$.

Demuestre que $g'(x) = g(x)$.

P8. Sea $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica:

a) f es continua para todo $x \geq 0$.

b) f' existe para todo $x > 0$.

c) $f(0) = 0$.

d) f' es estrictamente creciente.

Sea $g\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

1. Demuestre, aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[0,x]$, que $f'(x) > g(x)$.
2. Deduzca que g es estrictamente creciente.

P9. Sean $f,g : [0,1] \to [0,1]$ funciones continuas y epiyectivas. Demuestre que existe $c \in [0,1]$ tal que: $f(c) = g(c)$

P10. (a) Sea $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ una función derivable en todo su dominio, y que satisface

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in]0,\infty[$$

demuestre que f es constante .
(*Ind*: use el teorema del valor medio).

(b) Sea $f :]0,\infty] \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo su dominio, y que satisface

$$\forall x > 0 \quad x \cdot f'(x) = -f(x)$$

demuestre que existe una constante K tal que

$$\forall x > 0 \qquad f(x) = \frac{K}{x}$$

P11. Se dice que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada sobre $[a,b]$ si existe una constante $k \geq 0$ tal que : $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq k$. Cualquiera sea el conjunto de puntos t_i tales que : $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$. Demuestre que si f es derivable en $[a,b]$ y f' es acotada en $]a,b[$ entonces f es de variación acotada en $[a,b]$. Ind. Utilice el teorema del valor medio.

P12. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable con $g'(x) \neq 0$ en todo $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = cos(kg(x))$

a) Muestre que f, f', f'', g, g', g'' satisfacen la relación

$$f'' - f'\frac{g''}{g'} + (kg')^2 f = 0$$

b) Calcule $f^{(n)}(0)$ para $g(x) = x$.

P13. Sea $[a,b]$, $a<b$ y $f(x)$ una función definida en $[a,b]$, positiva y continuamente derivable (derivable con derivada continua) en (a,b). Se definen las funciones $g(x)$ y $h(x)$ de la siguiente forma

$$g(x) = (x-a)(x-b)f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

y

$$h(x) = g'(x) + cg(x) \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R}$$

Probar que h tiene al menos una raíz en (a,b).

P14. *a*) Considere las funciones siguientes definidas para todo $x>0: f(x) = \sqrt{\frac{2+x^3}{2+x}}$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$, $h(x) = 4c\, arctg(\frac{1}{x}) - csen(cx) + d$. Encuentre los valores de las constantes a, b, c y d, sabiendo que f y g tienen la misma recta tangente en $x=1$ y adem'as que las rectas tangentes a f y h son perpendiculares en $x=0$. Nota. Dado que h no est'a definido en $x=0$ considere su límite cuando x tiende a 0^+.

P15. Estudie el gráfico de la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, determinando: dominio, recorrido, continuidad y eventuales reparaciones de discontinuidades, diferenciabilidad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos, asíntotas y gráfico.

P16. Considere la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x} e^{\frac{1}{x}}$. Para f

a) Encuentre dominio, ceros y asíntotas de todo tipo. Analice su continuidad, estudie los límites laterales en 0 y encuentre su recorrido.

b) Calcule f'. Estudie el crecimiento de f y encuentre los m'aximos y mínimos locales y globales (en el caso de existir).

c) Calcule f''. Estudie la convexidad de f y encuentre los puntos de inflexión.

d) Usando toda la información anterior grafique f.

P17. Estudie completamente la siguiente función:

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3\ln(x)}{x}$$

para ello

a) Analice el Dominio de f y encuentre un cero por inspección.

b) Estudie la existencia de asíntotas.

c) Calcule f' y estudie el crecimiento de f. Analice la existencia de mínimos y máximos.

d) Calcule f'' y estudie la convexidad de f. Analice puntos de inflexión.

e) Bosqueje f.

P18. Para

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{(1-x)^2}{(x-2)}$$

determinar

Dominio, ceros, signos, crecimiento y convexidad.Ademas calule sus asintotas horizontales verticales y oblicuas y Grafique.