MA1002, Auxiliar 1
Cálculo Diferencial e Integral
15 de Diciembre, 2009
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliar: Benjamín Obando

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq 0, \quad \forall x \leq 0 \\ f(x) &\geq 1, \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

   Pruebe que f no es continua en 0.

2. Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{sen(\pi x)}{x(x-1)}$ y reparar sus discontinuidades.

3. Determinar el conjunto de parámetros (a, b, c) con $a, b, c > 0$ para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{asen(bx)}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{ln(c+(a+b)x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

   es continua en todo $\mathbb{R}$.

4. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que satisfacen la relación

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geq f(y) + g(y)(y - x)$$

   Probar que si g es una función acotada entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$.

5. Considere una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con un único mínimo global en el punto $\overline{x}$ y que satisface la propiedad de $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Si x_n es una sucesión que tiene la propiedad:

$$f(x_n) \leq f(\overline{x}) + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

   a) Pruebe que si $\{x_{\phi(n)}\}$ converge a l, entonces $l = \overline{x}$.
   b) Pruebe que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión que converge a $\overline{x}$

6. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) > 0$. probar que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

7. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, se define la funci'on $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \text{máx}\{g(t) : t \in [0, x]\}$. Demostrar que si $x_0 \in \mathbb{R}_+$ es tal que: $g(x_0) < f(x_0)$, entonces $(\exists\epsilon > 0)$ tal que f es constante en el intervalo $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$