MA1002, Tarea 1
Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliar: Benjamín Obando

- P1.** Usando la definición de continuidad, demostrar que la función $y = x^2$ es continua en $\mathbb{R}$.
- P2.** Probar que la función $y = \sqrt{x}$ es continua para $x > 0$.
- P3.** Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que existe una constante $L > 0$ tal que para todo $x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

probar que f es continua en A .

- P4.** La función $f(x)$ no está definida para $x = 0$. Defina $f(0)$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, si:

- a) $f(x) = \frac{1}{x}[(1+x)^n - 1]$.
- b) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
- c) $f(x) = \frac{1}{x}[\ln(1+x) - \log(1-x)]$.
- d) $f(x) = \frac{1}{x}(e^x - e^{-x})$.
- e) $f(x) = x^2 \sin(1/x)$.
- f) $f(x) = x \cot x$.

- P5.** Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

- a) $f(x) = [x]$
- b) $f(x) = x - [x]$
- c) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$
- d) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$
- e) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$

- P6.** Este problema entrega una demostración de la continuidad de las funciones seno y coseno.

- a) Use la desigualdad

$$|\sin x| \leq |x| \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{3},$$

para probar que el seno es continuo en cero.

- b) Use la identidad $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ para probar que el coseno es continuo en cero.
- c) Use las fórmulas para $\sin(x+h)$ y $\cos(x+h)$ para probar que el seno y el coseno son continuos en cualquier real x .

- P7.** Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Muestre que si f es continua en 0, entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Indicación: Muestre que $f(0) = 0$.

P8. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{-1/x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pruebe que f es continua.

P9. Determine el dominio y puntos de continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ x + \ln x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \arctan((x-2)^2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

P10. Estudiar la continuidad de la función $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)}$ y reparar sus discontinuidades.

P11. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f para $x \neq 0$.

b) Demostrar, usando la definición de continuidad, que f es continua en $x = 0$.

P12. Calcular el valor de a para que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^4 - 3x^3}{7x^5 + 3x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

P13. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones (donde $a, p \in \mathbb{R}$):

a) $f(x) = |x|^p \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, si $x \neq 0$, $f(0) = a$.

b) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \\ (x+p)^2 & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

c) $f(x) = \tan x$

d) $f(x) = |x|^p$ si $x \neq 0$, $f(0) = a$.

e) $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$, si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$; $f(0) = 1$

P14. Considere:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \log(x)}{x-1} & \text{si } x > 0, x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$$

Encuentre α para que f sea continua.

P15. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi/2x) & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Demostrar que no hay forma de elegir α de modo que f sea continua en 0.

P16. Considere la función definida en $(0, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en los irracionales y discontinua en los racionales.