Descomposición Polar

$\underset{\sim}{F} = \text{Grad}\,\underset{\sim}{\chi} \qquad J = \det \underset{\sim}{F} > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \underline{U}, \underline{V}, \underline{R}$ tal que

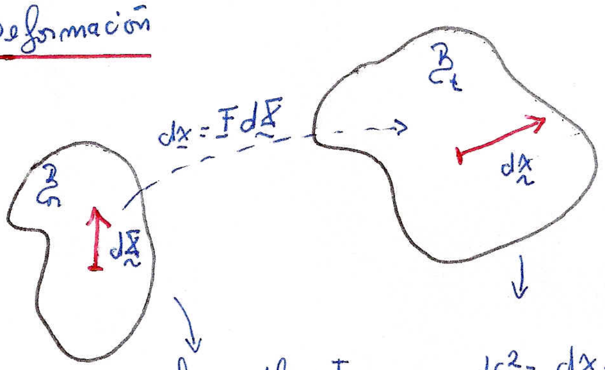
$$\underset{\sim}{F} = \underline{R}\,\underline{U} = \underline{V}\,\underline{R} \qquad \underline{R} \text{ es ortogonal} \Rightarrow \underline{R}\,\underline{R}^T = \underline{R}^T\underline{R} = \underline{I}$$

tensor identidad

$\underline{U}, \underline{V}$ son simetricos "positivos definidos" (positive definite)

$$\det \underline{R} = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \underline{F} = \det \underline{U} = \det \underline{V}$$

Deformación



¿Como definir la "deformación"?

$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \leftarrow$ barra unidimesional

largo del vecto

$$dS^2 = d\underset{\sim}{X} \cdot d\underset{\sim}{X}$$

arbitrario

$$ds^2 = d\underset{\sim}{x} \cdot d\underset{\sim}{x}$$

$$\underbrace{ds^2 - dS^2}_{\text{final - inicial}} = d\underset{\sim}{x} \cdot d\underset{\sim}{x} - d\underset{\sim}{X} \cdot d\underset{\sim}{X}$$

$$= \underbrace{\underline{F}\,d\underline{X}}_{F_{ij}dX_j} \cdot \underbrace{\underline{F}\,d\underline{X}}_{F_{ik}dX_k} - d\underline{X} \cdot d\underline{X}$$

$$= d\underset{\sim}{X} \cdot \left[\underbrace{(\underline{F}^T\underline{F} - \underline{I})}\, d\underline{X} \right]$$

se define el tensor de deformacion de Lagrange $\underset{\sim}{E}$

$$\underset{\sim}{E} = \frac{1}{2}\left(\underline{F}^T\underline{F} - \underline{I}\right)$$

Pero $\underline{F} = \underline{R}\,\underline{U} \Rightarrow \underline{E} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\underline{U}^T}_{=\underline{U}}\underbrace{\underline{R}^T\underline{R}}_{=\underline{I}}\,\underline{U} - \underline{I}\right)$

$$\underline{E} = \frac{1}{2}\left(\underline{U}^2 - \underline{I}\right)$$

Definición: Se define $\underset{\sim}{C} = \underline{F}^T\underline{F} = \underline{U}^2$ y $\underline{B} = \underline{F}\,\underline{F}^T = \underline{V}\,\underline{R}\,\underline{R}^T\underline{V} = \underline{V}^2$ como los Tensores de deformacion de Cauchy-Green, derecho e izquierdo

Significado físico de $\underline{F}, \underline{U}, \underline{V}, \underline{R}$

$$\underline{F} = \underline{R}\,\underline{U} = \underline{V}\,\underline{R}$$

$\uparrow$ rotación

tensores de alargamiento derecho e izquierdo

$\underline{R} \mapsto$ ortogonal $\mapsto$ no aparece en $\underline{E}$

Los valores propios de $\underline{U}, \underline{V}$ son los mismos de $\underline{F}$.

$\underline{U} \to$ positivo definido

$\underline{F}\,\underline{f}_i = \lambda_i \underline{f}_i$ ← no hay suma

$$\underbrace{\underline{F}^T\underline{F}}_{\underline{C}}\,\underline{f}_i = \lambda_i \underline{F}^T\underline{f}_i = \lambda_i^2 \underline{f}_i$$

pero $\underline{U} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$ ← diagonal

$$\Rightarrow \underline{C}\,\underline{f}_i = \underline{U}^2\underline{f}_i = \lambda_i^2 \underline{f}_i \Rightarrow \mu_i^2 = \lambda_i^2$$

$$\underline{U}\,\underline{u}_i = \mu_i \underline{u}_i \Rightarrow \underbrace{\underline{R}\,\underline{U}}_{\underline{F}}\,\underline{u}_i = \mu_i \underline{R}\,\underline{u}_i \Rightarrow \underbrace{\underline{F}\,\underline{R}^T}_{\underline{V}\,\underline{R}}\underline{R}\,\underline{u}_i = \mu_i \underline{R}\,\underline{u}_i$$

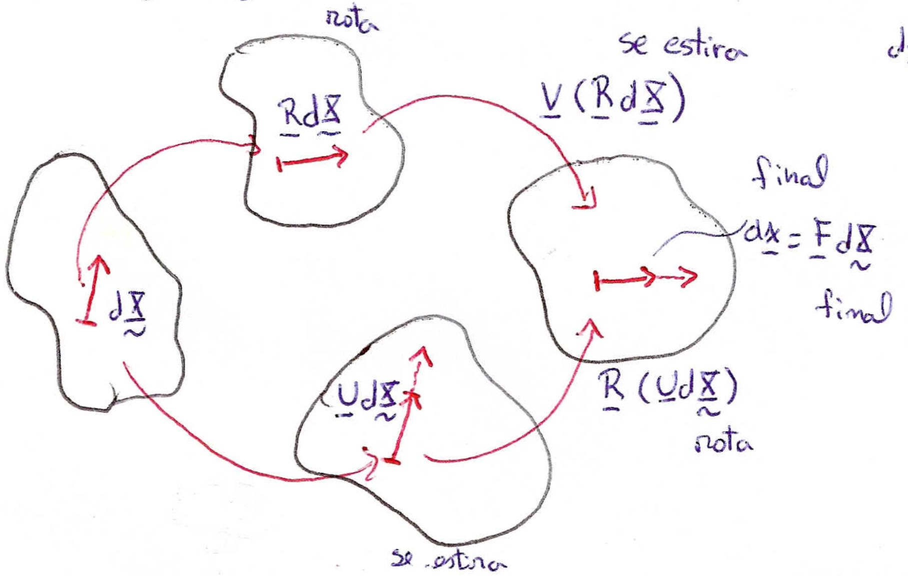
$\underline{F} \quad \underline{R}^T\underline{R}\,\underline{u}_i \qquad \underbrace{\underline{V}\underline{R}}\ \ \underline{I}$

$$\Rightarrow \underline{V}\,\underline{R}\,\underline{u}_i = \mu_i \underline{R}\,\underline{u}_i$$

$$\Leftrightarrow \underline{V}\,\underline{v}_i = \mu_i \underline{v}_i \quad \text{donde} \quad \underline{v}_i = \underline{R}\,\underline{u}_i$$

$\Rightarrow$ los valores propios de $\underline{V}$ son los mismos de $\underline{U}$

$\mapsto$ La "fibra" $d\underline{X}$ rota y se estira



$$d\underline{x} = \underline{F}\,d\underline{X} = \underline{R}\,\underline{U}\,d\underline{X} = \underline{V}\,\underline{R}\,d\underline{X}$$

¿Es importante $\underline{R}$ para caracterizar la "deformación" de un material?

Cambio en la referencia

Sea $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(\underline{X}, t)$, sean dos configuraciones de referencia

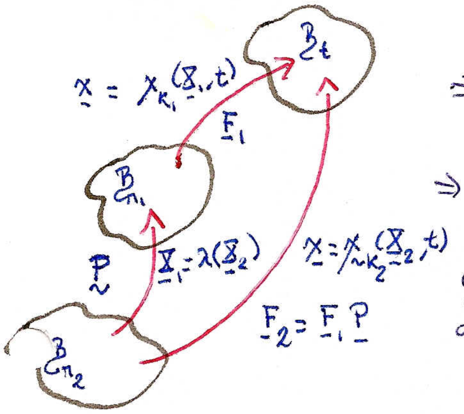
$\underset{\sim}{\kappa}_1, \underline{\kappa}_2 \Rightarrow \underset{\sim}{\underline{X}}_1 = \underset{\sim}{\kappa}_1(\underline{X}) \quad \underline{X}_2 = \kappa_2(\underline{X})$

Pero $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{\kappa}_1^{-1}(\underset{\sim}{X}_1), t) = \underset{\sim}{\chi}_{\underline{\kappa}_1}(\underset{\sim}{X}_1, t)$

$\underline{X} = \underline{\kappa}_2^{-1}(\underset{\sim}{X}_2)$

$\Rightarrow \underset{\sim}{X}_1 = \underline{\kappa}_1(\underline{\kappa}_2^{-1}(\underline{X}_2))$

$= \underset{\sim}{\lambda}(\underline{X}_2)$



$$\Rightarrow \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}_{\underline{\kappa}_1}(\overbrace{\underset{\sim}{\lambda}(\underline{X}_2)}^{\underline{X}_1}, t)$$

$$\Rightarrow \underline{F}_2 = \frac{\partial \underset{\sim}{\chi}_{\kappa_1}}{\partial \underline{X}_1} \frac{\partial \underset{\sim}{X}_1}{\partial \underline{X}_2} = \underline{F}_1 \underbrace{\frac{\partial \underset{\sim}{\lambda}}{\partial \underline{X}_2}}_{\underline{P}} = \underline{F}_1 \underline{P}$$

↑ gradiente de $\underset{\sim}{x}$ c/r a $\underset{\sim}{X}_2$

$$\boxed{\underline{F}_2 = \underline{F}_1 \underline{P}}$$

¿Para que sirve? → para definir la derivada "instantanea" de $\underset{\sim}{F}$ c/r al tiempo

→ Para describir fenomenos complejos

$\underbrace{\text{deformación elástica}}_{F_e} + \underbrace{\text{deformación}}_{F_p}$ plástica + $\underbrace{\text{cambio de fase}}_{F_f}$

$$\Rightarrow \underline{F}_T = \underbrace{\underline{F}_f \, \underline{F}_p \, \underline{F}_e}$$

↑ proceso total

↦ Se tiene primero def. elast, y F_e es calculado c/r a referencia sin def. ni esfuerzos. Luego a partir de la config. de max. esf. elast. se calcula o determ. la config. para la def. plástica $\underline{F}_p$ hasta alcanzar el cambio de fase, etc

notese que en elasticidad lineal (pequeñas deformaciones) la deformacion total se calcula como la suma de la deformación elástica + plastica, + etc.

Derivada en el tiempo (stretching, spin)

Originalmente se tenía la descripción del movimiento de la partícula

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(\underline{X}, t)$$

$\uparrow$ posición ocupada por la partícula $\underline{X}$ para el instante t

La velocidad, la aceleración, etc para la partícula $\underline{X}$ se define como

$$\dot{\underset{\sim}{x}} \overset{def}{=} \frac{\partial \underset{\sim}{\chi}(\underline{X}, t)}{\partial t} \qquad \ddot{\underset{\sim}{x}} \overset{def}{=} \frac{\partial^2 \underset{\sim}{\chi}(\underline{X}, t)}{\partial t^2} \quad \ldots \text{etc}$$

$\downarrow$ $\underline{v}$ $\qquad$ ojo depende de $\underline{X}$ $\qquad$ $\downarrow$ $\underline{a}$

Ahora bien, como $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{\kappa}(\underline{X})$ era fijo en el tiempo, se usa $\underline{X} = \underline{\kappa}^{-1}(\underline{X})$

y se tiene

$$\underset{\sim}{v} \overset{def}{=} \frac{\partial \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{X}, t)}{\partial t} \qquad \underline{a} \overset{def}{=} \frac{\partial^2 \underset{\sim}{\chi}(\underline{X}, t)}{\partial t^2}$$

De modo que el operador $(\dot{\ })$, $(\ddot{\ })$ se entiende como la derivada en el tiempo con $\underset{\sim}{X}$ $(\underline{X})$ fijo.

$\Rightarrow$ Sea $\underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{X}, t)$, se calcula $\underline{v} = \dfrac{\partial \underline{\chi}}{\partial t}(\underline{X}, t)$ $\qquad \underline{a} = \dfrac{\partial^2 \underline{\chi}}{\partial t^2}(\underline{X}, t)$

usemos $\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X}, t) \Rightarrow \underset{\sim}{X} = \underline{\chi}^{-1}(\underline{x}, t)$, y ahora insertemos en ↺

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial t}(\underline{\chi}^{-1}(\underline{x}, t)) \qquad \underline{a} = \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial t}(\underline{\chi}^{-1}(\underline{x}, t))$$

o sea $\underbrace{\dot{\underline{x}} = \dot{\underline{x}}(\underline{x}, t) \qquad \ddot{\underline{x}} = \ddot{\underline{x}}(\underline{x}, t)}$

↦ Una vez calculada la velocidad y la aceleración, se puede reescribir las expresiones para que queden dependiendo de la posición actual $\underline{x}$, en el tiempo t.

↦ En mecánica de fluidos en general no sabemos de donde viene una partícula (configuración de referencia), y quizás nos puede interesar calcular su posición futura, pero si podemos conocer su velocidad $\underline{v}$, y aceleración $\underline{a}$ para el momento presente t para cada partícula en su posición presente $\underline{x}$ en t.

↦ En mecánica de fluidos lo que se hace es asumir $\dot{\underline{x}}$, $\ddot{\underline{x}}$ como función de $\underline{x}, t$ como "dato"

$\mapsto$ Sea una función f escalar, y $\underline{f}$ campo vectorial

$$f = f(\underset{\sim}{X}, t) \qquad \underline{f} = \underline{f}(\underset{\sim}{X}, t)$$

$$\dot{f} \overset{def}{=} \frac{\partial f(\underset{\sim}{X}, t)}{\partial t}$$

Grad f ← es el operador gradiente c/r a $\underset{\sim}{X}$

↳ Coordenadas Cartesianas

$$(\text{Grad } f)_i = \frac{\partial f}{\partial X_i}$$

Pero $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{\chi}^{-1}(\underline{x}, t) \Rightarrow f = f(\underset{\sim}{\chi}^{-1}(\underline{x}, t)) = f(\underline{x}, t)$

$$f' \overset{def}{=} \frac{\partial f(\underline{x}, t)}{\partial t}$$

↑ ojo $\underline{x}$ depende del tiempo

grad f ← operador gradiente c/r a $\underline{x}$

↳ $(\text{grad } f)_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

Regla de la cadena si $f = f(\underline{x}, t)$

$$\dot{f} = \underbrace{\frac{\partial f(\underline{x}, t)}{\partial t}}_{f'} + \underbrace{\frac{\partial f(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}}}_{\text{grad } f} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$$

con $\underset{\sim}{X}$ constante

Coordenadas Cartesianas $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{\chi}(\underline{X}, t)}{\partial t} \overset{def}{=} \dot{\underline{x}}$$

$$\Rightarrow \dot{f} = f' + \text{grad } f \cdot \dot{\underline{x}}$$

Sea $\underline{f}$

$$\dot{\underline{f}} = \frac{\partial \underline{f}(\underline{X}, t)}{\partial t}$$

Grad $\underline{f}$ ← tensor de segundo orden

↘ $\dfrac{\partial f_i}{\partial X_j}$

$$\underline{f}' = \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}, t)}{\partial t}$$

grad $\underline{f}$ ↘ $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$

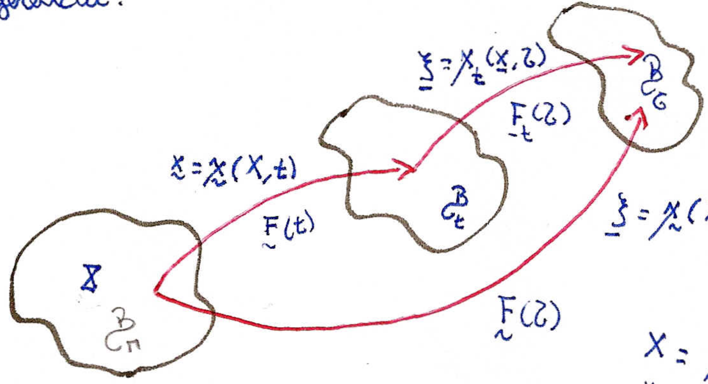
$$\dot{\underline{f}} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial t}(\underline{x}, t) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{f}} = \underline{f}' + \underbrace{\underbrace{\text{grad}\underline{f}}_{\text{matriz}} \; \underbrace{\dot{\underline{x}}}_{\text{vector}}}_{\text{vector}}$$

La configuración actual como la configuración de referencia

En la sección anterior se vio el tema de la derivada de $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(X,t)$ en el tiempo. La pregunta ahora es ¿Como podemos calcular la derivada de $\underset{\sim}{F}$ en el tiempo?

↦ Tomemos la configuración actual (deformada) como la configuración de referencia.



t, τ dos instantes distintos

$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(X,t)$ ← partícula, no hace referencia a ningún $\underset{\sim}{X} \in \underset{\sim}{K}$

$X = \underset{\sim}{\chi}^{-1}(\underset{\sim}{x},t)$

$\Downarrow$

$$\underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{\chi}^{-1}(\underset{\sim}{x},t),\tau) = \chi_t(\underset{\sim}{x},\tau)$$

↑ depende de t

↑ función de deformación relativa

Sean $\underset{\sim}{F}(t)$ y $\underset{\sim}{F}(\tau)$ los gradientes de deformación para $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(X,t)$ y $\underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{\chi}(X,\tau)$ calculados respecto a una referencia $\mathcal{B}_r$, $\underset{\sim}{X}$.

↦ Sea $F_t(\tau) \overset{def}{=} \operatorname{grad} \chi_t$

↑ operador gradiente respecto a la configuración $\mathcal{B}_t$ en coordenadas cartesianas $(\operatorname{grad} \chi_t)_{ij} = \dfrac{\partial \chi_{t\,i}}{\partial x_j}$

tenemos $\underset{\sim}{F}(\tau) = F_t(\tau)\,\underset{\sim}{F}(t)$

↦ Imaginemos que se trabaja con un fluido, y que no necesariamente conocemos de donde vienen las partículas, y que la única configuración útil para nosotros es $\mathcal{B}_t$, ¿de los gradientes $F(t)$, $F(\tau)$ o $F_t(\tau)$ cual es el importante para describir el movimiento del fluido? ↦ $F_t(\tau)$ ↦ estamos interesados en calcular la derivada o razón de cambio en el tiempo para $F_t(\tau)$

↦ Para $\tau = t$ $\quad F_t(\tau) = \underset{\sim}{I}$ → identidad

↦ Descomposición polar $\quad F_t(\tau) = R_t(\tau)\,U_t(\tau) = V_t(\tau)\,R_t(\tau)$

Stretching, Spin

↦ Respecto a la derivada en el tiempo del gradiente nos interesa determinar el cambio 'instantaneo' de $\underset{\sim}{F}$ en t, y este se puede calcular usando $F_t(\tau)$

Definición : $$\dot{F}_t(t) \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial \tau} F_t(\tau)\Big|_{\tau=t}$$

Definición : $$\underset{\sim}{G} \overset{def}{=} \dot{F}_t(t) \qquad \underset{\sim}{D} \overset{def}{=} \dot{U}_t(t) = \dot{V}_t(t) \qquad \underset{\sim}{W} \overset{def}{=} \dot{R}_t(t)$$

↑ stretching ↑ spin

Se tiene $U_t(\tau)$ es simetrico ⇒ $D = D^T$,

$$\mapsto \underset{\sim}{R}_t(\tau)\, \underset{\sim}{R}_t^T(\tau) = \underset{\sim}{I} \Rightarrow \frac{\partial()}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t} \mapsto \underbrace{\frac{\partial R_t(\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t}}_{\overset{def}{=} \dot{R}_t(t)} \underbrace{R_t^T(\tau)\Big|_{\tau=t}}_{\substack{\text{pero en } \tau=t \\ F_t(\tau)=I \Rightarrow R_t(\tau)=I \\ \text{para } \tau=t}} + \overbrace{R_t(\tau)\Big|_{\tau=t}}^{=\underset{\sim}{I}} \underbrace{\frac{\partial R_t^T(\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t}}_{\dot{R}_t^T(t)} = \underset{\sim}{0}$$

$$\Rightarrow W_t(t) + W_t^T(t) = \underset{\sim}{0} \Rightarrow W_t(t) \text{ es antisimetrico}$$

↦ tenemos que $$F(\tau) = F_t(\tau)\, F(t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau}(\;)\Big| \mapsto \frac{\partial F(\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t} = \frac{\partial F_t(\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t} F(t)$$

↑ ojo en τ no en t !

no se ve afectado por la derivación

$$\Rightarrow \dot{\underset{\sim}{F}}(t) = \dot{F}_t(t)\, F(t)$$

↑ "Buena" definición de la derivada en tiempo de $\underset{\sim}{F}$ (ahora calculado r/p a una referencia fija $\underset{\sim}{K}(X)$)

$$\Rightarrow \underset{\sim}{G} = \dot{\underset{\sim}{F}}\, \underset{\sim}{F}^{-1} \quad \text{pero} \quad F = \text{Grad}\, \underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X}, t) \Rightarrow \dot{F} = \text{Grad}\, \dot{\underset{\sim}{x}} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \underset{\sim}{X}}$$

↑ operador "fijo" en el tiempo

↓ recordar $\dot{x} \overset{def}{=} \frac{\partial \underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X}, t)}{\partial t}$

pero $$\underset{\sim}{F}^{-1} = (\text{Grad}\, \underset{\sim}{x})^{-1} = \left(\frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{X}}\right)^{-1}$$

$\underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{F}^{-1} = \underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{F}^{-1}\underset{\sim}{F}$ $\mapsto$ Coordenadas Cartesianas $\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial X_j}}_{F_{ij}}\underbrace{\frac{\partial X_j}{\partial x_k}}_{(\underset{\sim}{F}^{-1})_{jk}} = \underset{\underset{(\underset{\sim}{I})_{ik}}{\uparrow}}{\delta_{ik}} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_k}$

por lo tanto en notación indicial en coordenadas Cartesianas tenemos

$$\dot{\underset{\sim}{F}}\,\underset{\sim}{F}^{-1} \mapsto \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} \mapsto \text{equivalente} \quad \operatorname{grad}\dot{\underset{\sim}{x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{G} = \operatorname{grad}\dot{\underset{\sim}{x}}}$$

Consideremos la descomposición $\underset{\sim}{F}_t(\tau) = \underset{\sim}{R}_t(\tau)\,\underset{\sim}{U}_t(\tau)$

$$\Rightarrow \underbrace{\left.\frac{\partial \underset{\sim}{F}_t(\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=t}}_{\underset{\sim}{G}} = \underbrace{\left.\frac{\partial \underset{\sim}{R}_t(\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=t}}_{\underset{\sim}{W}} \underbrace{\left.\underset{\sim}{U}_t(\tau)\right|_{\tau=t}} + \underbrace{\left.\underset{\sim}{R}_t(\tau)\right|_{\tau=t}} \underbrace{\left.\frac{\partial \underset{\sim}{U}_t(\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=t}}_{\underset{\sim}{D}}$$

pero en $\tau=t$
$\underset{\sim}{F}_t(\tau)=\underset{\sim}{I} \Rightarrow \underset{\sim}{U}_t(\tau)=\underset{\sim}{I}$
y $\underset{\sim}{R}_t(\tau)=\underset{\sim}{I}$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{W} + \underset{\sim}{D}$$

Ejercicio: Demuestre que

$$\underset{\sim}{W} = \dot{\underset{\sim}{R}}\underset{\sim}{R}^T + \frac{1}{2}\underset{\sim}{R}(\dot{\underset{\sim}{U}}\underset{\sim}{U}^{-1} - \underset{\sim}{U}^{-1}\dot{\underset{\sim}{U}})\underset{\sim}{R}^T$$
$$\underset{\sim}{D} = \frac{1}{2}\underset{\sim}{R}(\dot{\underset{\sim}{U}}\underset{\sim}{U}^{-1} + \underset{\sim}{U}^{-1}\dot{\underset{\sim}{U}})\underset{\sim}{R}^T$$

donde $\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{R}$ son los tensores en que se descompone polarmente $\underset{\sim}{F}$

Solución: $\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}^T$, $\underset{\sim}{W} = -\underset{\sim}{W}^T \Rightarrow \frac{1}{2}(\underset{\sim}{G}+\underset{\sim}{G}^T) = \underset{\sim}{D}$ y $\frac{1}{2}(\underset{\sim}{G}-\underset{\sim}{G}^T) = \underset{\sim}{W}$

pero $\underset{\sim}{G} = \dot{\underset{\sim}{F}}\,\underset{\sim}{F}^{-1}$, sea $\underset{\sim}{F}(t) = \underset{\sim}{R}(t)\,\underset{\sim}{U}(t) \Rightarrow \dot{\underset{\sim}{F}}(t) = \dot{\underset{\sim}{R}}(t)\underset{\sim}{U}(t) + \underset{\sim}{R}\dot{\underset{\sim}{U}}$,

además $\underset{\sim}{F}^{-1} = \underset{\sim}{U}^{-1}\underbrace{\underset{\sim}{R}^{-1}}_{=\underset{\sim}{R}^T} \Rightarrow \underset{\sim}{G} = (\dot{\underset{\sim}{R}}\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{R}\dot{\underset{\sim}{U}})\underset{\sim}{U}^{-1}\underset{\sim}{R}^T$,

por otra parte $\underset{\sim}{G}^T = \underset{\sim}{F}^{-T}\dot{\underset{\sim}{F}}^T$ pero $\underset{\sim}{F}^T = \underset{\sim}{U}^T\underset{\sim}{R}^T = \underset{\sim}{U}\underset{\sim}{R}^T$

$\Rightarrow \dot{\underset{\sim}{F}}^T = \dot{\underset{\sim}{U}}\underset{\sim}{R}^T + \underset{\sim}{U}\dot{\underset{\sim}{R}}^T$, sin embargo $\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{R}^T = \underset{\sim}{I} \Rightarrow \dot{\underset{\sim}{R}}\underset{\sim}{R}^T + \underset{\sim}{R}\dot{\underset{\sim}{R}}^T = \underset{\sim}{0}$

$\Rightarrow \dot{\underset{\sim}{R}}^T = -\underset{\sim}{R}^T\dot{\underset{\sim}{R}}\underset{\sim}{R}^T$, finalmente $\underset{\sim}{F}^{-T} = \underbrace{\underset{\sim}{R}^{-T}}_{=\underset{\sim}{R}}\underset{\sim}{U}^{-1}$, de modo que

$$\underset{\sim}{G}^T = \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U}^{-1}(\dot{\underset{\sim}{U}}\underset{\sim}{R}^T - \underset{\sim}{U}\underset{\sim}{R}^T\dot{\underset{\sim}{R}}\underset{\sim}{R}^T)$$

$$\Rightarrow \underline{D} = \frac{1}{2}\left[(\dot{\underline{R}}\underline{U} + \underline{R}\dot{\underline{U}})\underline{U}^{-1}\underline{R}^T + \underline{R}\underline{U}^{-1}(\dot{\underline{U}}\underline{R}^T - \underline{U}\underline{R}^T\dot{\underline{R}}\underline{R}^T)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{\underline{R}}\underbrace{\underline{U}\underline{U}^{-1}}_{\underline{I}}\underline{R}^T + \underline{R}\dot{\underline{U}}\underline{U}^{-1}\underline{R}^T + \underline{R}\underline{U}^{-1}\dot{\underline{U}}\underline{R}^T - \underline{R}\underbrace{\underline{U}^{-1}\underline{U}}_{\underline{I}}\underline{R}^T\dot{\underline{R}}\underline{R}^T \right)$$

$$\underline{I}$$

$$= \frac{1}{2}\underline{R}(\dot{\underline{U}}\underline{U}^{-1} + \underline{U}^{-1}\dot{\underline{U}})\underline{R}^T$$

$$\text{y} \quad \underline{W} = \frac{1}{2}(\dot{\underline{R}}\underline{R}^T + \underline{R}\dot{\underline{U}}\underline{U}^{-1}\underline{R}^T - \underline{R}\underline{U}^{-1}\dot{\underline{U}}\underline{R}^T + \dot{\underline{R}}\underline{R}^T)$$

$$= \dot{\underline{R}}\underline{R}^T + \frac{1}{2}\underline{R}(\dot{\underline{U}}\underline{U}^{-1} - \underline{U}^{-1}\dot{\underline{U}})\underline{R}^T$$

Se puede ver que $\underline{D}$ y $\underline{W}$ no son lo mismo que $\dot{\underline{U}}$ y $\dot{\underline{R}}$

Ejemplos de deformaciones y de campos de velocidades

Cálculo del gradiente de deformación coordenadas Cartesianas

$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{X}, t)$ y $\underline{F} = \text{Grad}\, \underset{\sim}{x} \quad \left(= \dfrac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{X}} \right)$

$\underset{\sim}{x}$ Coordenadas Cartesianas y $\underset{\sim}{X}$ en Coordenadas Cartesianas

$\downarrow$

$\underset{\sim}{x} = x_1 \underset{\sim}{e}_1 + x_2 \underset{\sim}{e}_2 + x_3 \underset{\sim}{e}_3 \qquad \underset{\sim}{X} = X_1 \underline{E}_1 + X_2 \underline{E}_2 + X_3 \underline{E}_3$

$x_i = \chi_i(X_j, t) \quad i,j = 1,2,3$

$\underset{\sim}{e}_i$, $\underset{\sim}{E}_j$ los vectores unitarios de las bases para la configuración deformada y de referencia respectivamente

↦ En particular $\underset{\sim}{e}_i$ y $\underset{\sim}{E}_j$ no dependen de $\underset{\sim}{x}$ o $\underset{\sim}{X}$

$$\underline{F} = \text{Grad}\, \underset{\sim}{\chi} \equiv \frac{\partial \underset{\sim}{\chi}}{\partial \underset{\sim}{X}} \equiv \frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{X}} \equiv \underbrace{\nabla_k}_{\text{la referencia } k \text{ de } \underset{\sim}{X}} \otimes \underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X}) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{E}_j$$

← es como si ∇ actúa por "atrás"

↦ El operador Grad en coordenadas Cartesianas se puede ver como

$$\text{Grad} = \frac{\partial (\;)}{\partial X_j} \underset{\sim}{E}_j$$

Cálculo del gradiente en coordenas curvilíneas

↦ En el capítulo de el gradiente y otros operadores en Coordenadas curvilíneas aparecían las bases $\{\underset{\sim}{g}^i\}$, $\{\underset{\sim}{g}_j\}$, en donde sea x^j las coordenas curvilíneas, y un punto en el espacio $\underset{\sim}{x}$,

$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (x_1(x^j), x_2(x^j), x_3(x^j))^T \quad j = 1,2,3$

se definía $\underset{\sim}{g}_j = \dfrac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial x^j}$ y $\underset{\sim}{g}^i$ era tal que

$$\underset{\sim}{g}^i \cdot \underset{\sim}{g}_j = \delta^i_j$$

↦ Sea un vector $\underset{\sim}{v}$ escrito en la base $\{\underset{\sim}{g}^i\}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{v} = v_i\, \underset{\sim}{g}^i$