

El operador gradiente ∇ (c/o c/n a x^j , el sistema curvilinear)
para $\underline{v}$ se calculaba

$$\begin{aligned}\nabla \otimes \underline{v} &= (\nabla \otimes v_i) \underline{g}^i + v_i \nabla \otimes \underline{g}^i \\ &= \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ji}^k v_k \right) \underline{g}^i \otimes \underline{g}^j \quad \leftarrow \text{Se podía calcular esto como covariante o } \underline{g}^i \otimes \underline{g}_j, \underline{g}_i \otimes \underline{g}^j \text{ mixto.}\end{aligned}$$

⇒ En el caso del gradiente de deformación la situación es distinta

$\underline{x} = x^i \underline{g}_i$
↓
 $\underline{g}_i$ pueden depender de las coordenadas curvilineas x^j , pero no en $\underline{X}$

$\underline{X} = X_j \underline{G}^j$
↓
solo podrían depender de las coordenadas curvilineas $\underline{X}^j$

⇒ Cuando se calcula el gradiente c/n a $\underline{X}$ de $\underline{x}$ no es necesario incluir el término $\Gamma_{ji}^k x_k$ que vendría de $\nabla \otimes \underline{g}^i$, pues en nuestro caso tenemos $\nabla_k \otimes \underline{g}_i$

↓
c/n a $\underline{X}$ ↓ no depende de $\underline{X}$ directamente

$$\Rightarrow \text{Grad } \underline{x} = \frac{\partial x^i}{\partial X_j} \underline{g}_i \otimes \underline{G}^j$$

→ tenemos que $\underline{F}$ sería un tensor mixto $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$
¿Por qué? x^i $\underline{g}_i, \underline{G}^j$ no son necesariamente unitarios,

se modo que se definía la componente 'física' como

$\hat{\underline{g}}_i = \frac{1}{|\underline{g}_i|} \underline{g}_i$
no hay suma

$\hat{\underline{G}}^j = \frac{1}{|\underline{G}^j|} \underline{G}^j$

de modo que $\text{Grad } \underline{x} = \frac{\partial x^i}{\partial X_j} |\underline{g}_i| |\underline{G}^j| \hat{\underline{g}}_i \otimes \hat{\underline{G}}^j$

Ejemplo $\underline{x}$ en coordenadas cilíndricas, $\underline{\bar{x}}$ Coordenadas Cartesianas

(21)

$$\psi^{-1} = (x^1 \cos x^2, x^1 \sin x^2, x^3) \quad x^1 \mapsto r \quad x^2 \mapsto \theta \quad x^3 \mapsto z$$

$$\underline{g}_1 = \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x^1} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad \underline{g}_2 = \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x^2} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

$$\underline{g}_3 = (0, 0, 1)$$

se define $\underline{e}_r = \frac{1}{|\underline{g}_1|} \underline{g}_1 = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ $\underline{e}_\theta = \frac{1}{|\underline{g}_2|} \underline{g}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$

$$\underline{e}_z = \frac{1}{|\underline{g}_3|} \underline{g}_3 = (0, 0, 1) \quad \Rightarrow \underline{g}_2 = r \underline{e}_\theta$$

Por otra parte $\underline{\bar{x}}$ coordenadas Cartesianas $\Rightarrow$ no hay distinción entre covariante y contravariante, y por lo tanto $\underline{G}^i$ es igual a $\underline{G}_i$ y es igual a $\underline{E}_i$

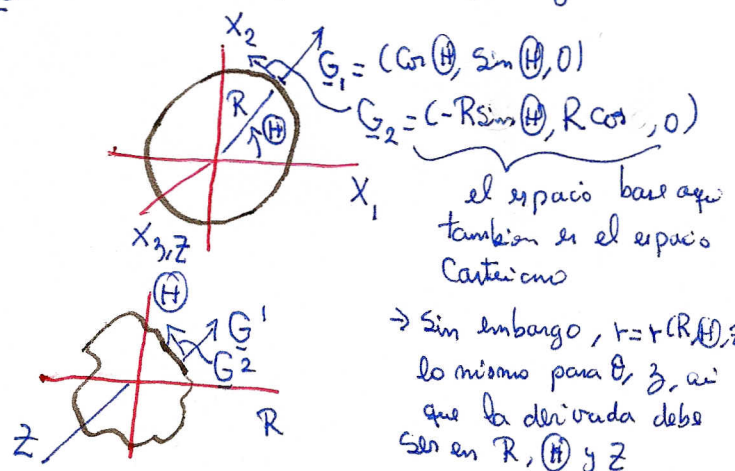
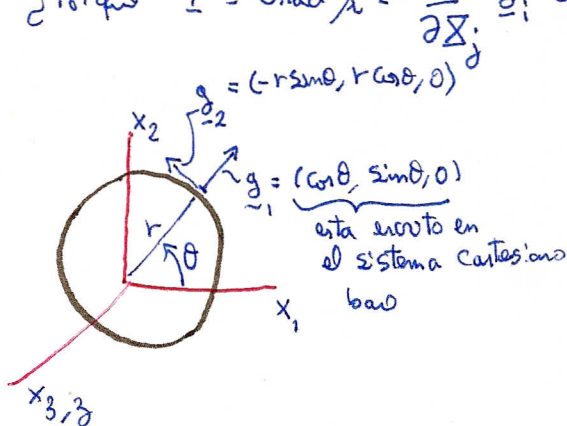
$$r = r(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \quad \theta = \theta(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \quad z = z(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

$$\underline{x} = (r, \theta, z)^T$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{F} = \text{Grad } \underline{x} &= \frac{\partial r}{\partial \bar{x}_1} \underline{e}_r \otimes \underline{E}_1 + \frac{\partial r}{\partial \bar{x}_2} \underline{e}_r \otimes \underline{E}_2 + \frac{\partial r}{\partial \bar{x}_3} \underline{e}_r \otimes \underline{E}_3 \\ &+ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}_1} r \underline{e}_\theta \otimes \underline{E}_1 + \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}_2} r \underline{e}_\theta \otimes \underline{E}_2 + \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}_3} r \underline{e}_\theta \otimes \underline{E}_3 \\ &+ \frac{\partial z}{\partial \bar{x}_1} \underline{e}_z \otimes \underline{E}_1 + \frac{\partial z}{\partial \bar{x}_2} \underline{e}_z \otimes \underline{E}_2 + \frac{\partial z}{\partial \bar{x}_3} \underline{e}_z \otimes \underline{E}_3 \end{aligned}$$

Ejemplo $\underline{x}$ en coordenadas cilíndricas y $\underline{\bar{x}}$ en coordenadas cilíndricas también

¿Por qué $\underline{F} = \text{Grad } \underline{x} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \underline{g}_i \otimes \underline{G}^j$? $\rightarrow$ ¿Por qué no $\underline{g}_i \otimes \underline{G}_j$, etc?



→ y por tanto, el espacio "base" no es el cartesiano, sino el espacio cilíndrico, en donde los vectores dirección son $\underline{G}^i$, el recíproco de $\underline{G}_j$, y en donde X_j en realidad vienen a representar R, θ y z

$$r = r(R, \theta, z) \quad \theta = \theta(R, \theta, z) \quad z = z(R, \theta, z) \quad \text{recuerda que } \underline{G}^i \cdot \underline{G}_j = \delta^i_j$$

$$\Rightarrow \underline{G}^1 = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$\underline{G}^2 = \frac{1}{R} (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \quad \underline{G}^3 = (0, 0, 1)$$

se define $\underline{E}_R = \frac{1}{|\underline{G}^1|} \underline{G}^1 = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$

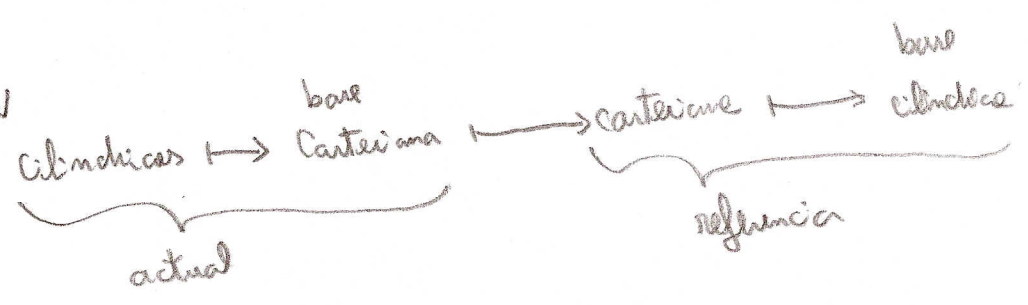
$$\underline{E}_\theta = \frac{1}{|\underline{G}^2|} \underline{G}^2 = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \quad \underline{E}_z = \frac{1}{|\underline{G}^3|} \underline{G}^3 = (0, 0, 1)$$

$$\underline{X} = (r, \theta, z)^T \Rightarrow \underline{G}^2 = \frac{1}{R} \underline{E}_\theta$$

$$\Rightarrow \underline{F} = G \text{grad } \underline{X} = \frac{\partial r}{\partial R} \underline{e}_r \otimes \underline{E}_R + \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{1}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{E}_\theta + \frac{\partial r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{E}_z$$

$$+ \frac{\partial \theta}{\partial R} r \underline{e}_\theta \otimes \underline{E}_R + \frac{\partial \theta}{\partial \theta} r \frac{\underline{e}_\theta}{R} \otimes \underline{E}_\theta + \frac{\partial \theta}{\partial z} r \underline{e}_\theta \otimes \underline{E}_z$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial R} \underline{e}_z \otimes \underline{E}_R + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{1}{R} \underline{e}_z \otimes \underline{E}_\theta + \frac{\partial z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{E}_z$$



Ejemplos de deformación

② Deformación homogénea: Sea $\underline{x} = \underline{x}(\underline{\Sigma})$, y $\underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\Sigma}}$, si $\underline{F}$ no depende de $\underline{\Sigma}$ se dice que la deformación es homogénea $\Rightarrow$ "se deforma lo mismo en cualquier punto en el cuerpo $\mathcal{B}$ ".

Ej: Sea $\underline{x} = \underline{A} \underline{\Sigma} + \underline{c}_0$, donde $\underline{A}$ es un tensor de 2^{do} orden constante y $\underline{c}_0$ es un vector cte. $\Rightarrow \underline{F} = \underline{A}$

① Extensión uniforme de un cubo con contracción lateral

$$x_1 = \lambda \Sigma_1 \quad x_2 = \lambda^{-1/2} \Sigma_2 \quad x_3 = \lambda^{-1/2} \Sigma_3 \quad (\text{Coordenadas Cartesianas})$$

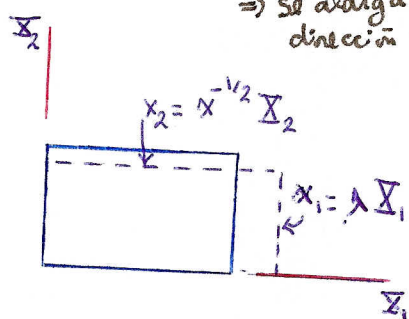
λ cte

$$\Rightarrow F_{ij} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1/2} \end{pmatrix}$$

$$x_1 - \Sigma_1 = \lambda - 1 \quad x_2 - \Sigma_2 = \lambda^{-1/2} - 1 \quad x_3 - \Sigma_3 = \lambda^{-1/2} - 1$$

$\because \lambda > 1$
 $\Rightarrow$ se alarga en dirección 1

$\Rightarrow \lambda^{-1/2} < 1 \Rightarrow$ se "acorta" en la dirección 2 y 3

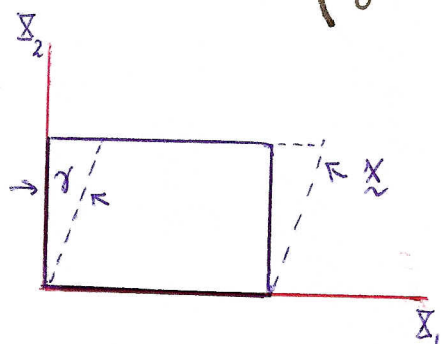


② Corte simple

$$x_1 = \Sigma_1 + \gamma \Sigma_2 \quad x_2 = \Sigma_2 \quad x_3 = \Sigma_3$$

$$\Rightarrow [F] = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\gamma \Rightarrow$ "cantidad de corte"



6) Deformaciones no homogéneas

ii) Extensión e inflado de un tubo cilíndrico

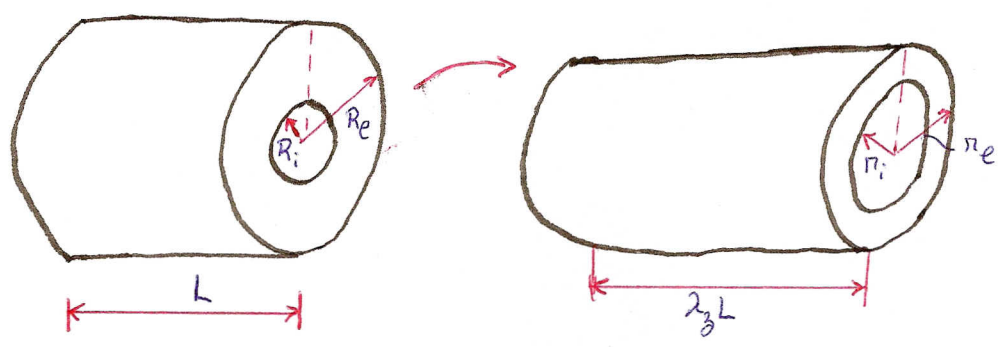
Tubo original $R_i \leq R \leq R_e$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $0 \leq z \leq L$

tubo deformado $r = r(R)$

el radio final o deformado solo depende de la posición radial inicial

$\theta = \theta$
el ángulo se mantiene

$z = \lambda_3 z$ $\lambda_3 : \text{cte}$
se puede alargar o acortar

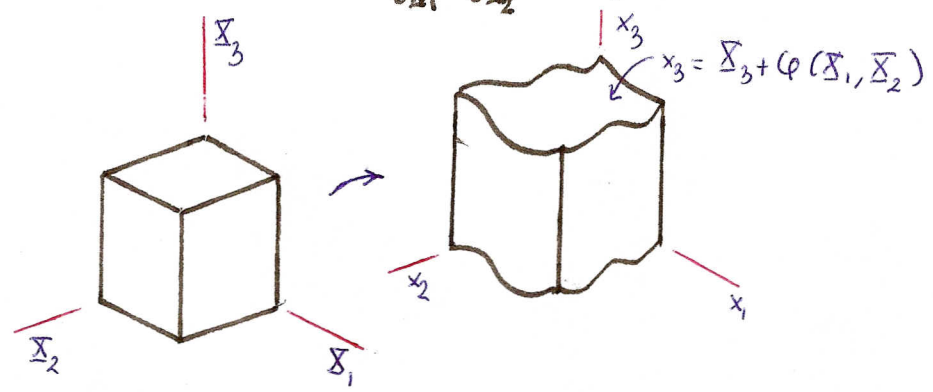


$r_i = r(R_i)$
 $r_e = r(R_e)$

iii) Corte anti-plano

$x_1 = X_1$ $x_2 = X_2$ $x_3 = X_3 + \varphi(X_1, X_2)$

$[F] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} & 1 \end{pmatrix}$

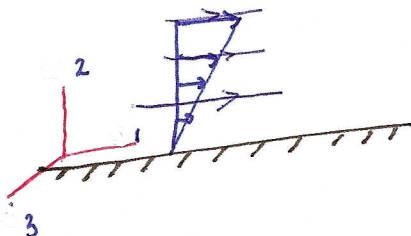


© Campos de velocidad

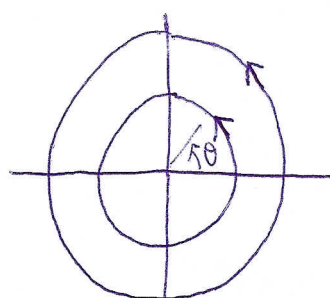
(35)

i) Flujo en corte $\dot{x}_1 = kx_2$ $\dot{x}_2 = 0$ $\dot{x}_3 = 0$ k cte.

$$\underline{G} = \text{grad } \underline{\dot{x}} \Rightarrow [G] = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



ii) Vortice $\dot{r} = 0$ $\dot{\theta} = \omega(r)$ $\dot{z} = 0$



$$\underline{G} = \text{grad } \underline{\dot{x}}$$

el gradiente se calcula c/n al mismo sistema de coordenadas cilíndricas en la que se ha escrito $\underline{\dot{x}}$, de modo que $\underline{g}^i$ si se ve afectado por el operador

$$\text{grad } \underline{\dot{x}} = \nabla \otimes \underline{\dot{x}} = \left(\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x^j} - \Gamma_{jk}^i v_i \right) \underline{g}^k \otimes \underline{g}^j \leftarrow \text{general}$$

$$\begin{aligned} \text{coord. cilíndricas} \Rightarrow \nabla \otimes \underline{\dot{x}} &= \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta} - \dot{\theta} \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta \\ \underline{\dot{x}} &= \dot{r} \underline{e}_r + \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{z} \underline{e}_z \\ &+ \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} + \dot{r} \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \\ &+ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \frac{\partial \dot{z}}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta \\ &+ \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{G} = -\frac{\omega(r)}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{d\omega(r)}{dr} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r$$

$$\Rightarrow [G] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\omega(r)}{r} & 0 \\ \frac{d\omega(r)}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D} = \frac{1}{2} (\underline{G} + \underline{G}^T) \Rightarrow [D] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{d\omega}{dr} - \frac{\omega}{r} & 0 \\ \frac{d\omega}{dr} - \frac{\omega}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{W} = \frac{1}{2} (\underline{G} - \underline{G}^T) \Rightarrow [W] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d\omega}{dr} - \frac{\omega}{r} & 0 \\ \frac{d\omega}{dr} + \frac{\omega}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \because \omega &= kr^{-1} \Rightarrow \omega' = -kr^{-2} \\ \Rightarrow \frac{d\omega}{dr} + \frac{\omega}{r} &= -kr^{-2} + kr^{-2} = 0 \\ \Rightarrow \underline{W} &= \underline{0} \end{aligned}$$

(iii)

$$\dot{x}_1 = -\Omega(x_2 - g(x_3)) \quad \dot{x}_2 = \Omega(x_1 - f(x_3)) \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \Omega = \text{cte}$$

(36)

(iv)

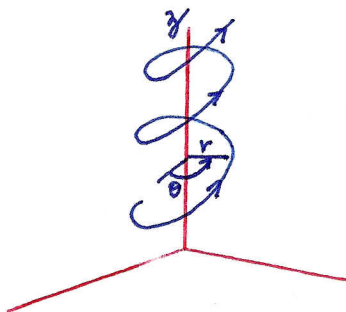
Helical flow

$$\dot{r} = 0$$

$$\dot{\theta} = \omega(r)$$

$$\dot{z} = u(r)$$

$$\omega' = \frac{d\omega}{dr} \quad u' = \frac{du}{dr}$$



$$\underline{G} = \text{grad } \underline{\dot{x}} = -\frac{\omega}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \omega' \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + u' \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r$$

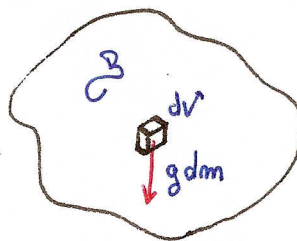
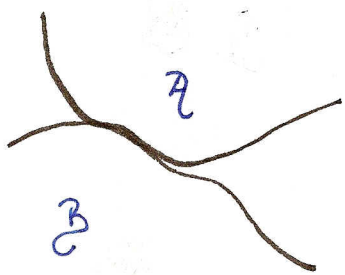
$$[G] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\omega}{r} & 0 \\ \omega' & 0 & 0 \\ u' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(v)

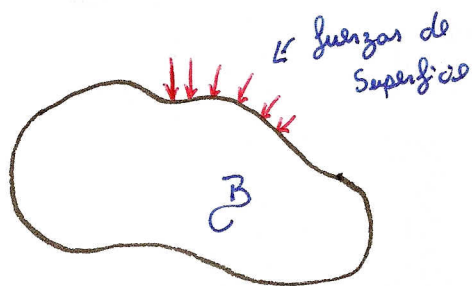
Campo de velocidades usado para estudiar el efecto de la rotación de la tierra en las corrientes del océano (Coriolis)

$$\dot{x}_1 = u(x_3) \quad \dot{x}_2 = v(x_3) \quad \dot{x}_3 = 0$$

- En el capítulo anterior se estudió las deformaciones, ahora se estudiará lo que causa las deformaciones, que son las fuerzas.
- Las fuerzas se clasifican de superficie y de cuerpo



$\downarrow g \leftarrow$ gravedad



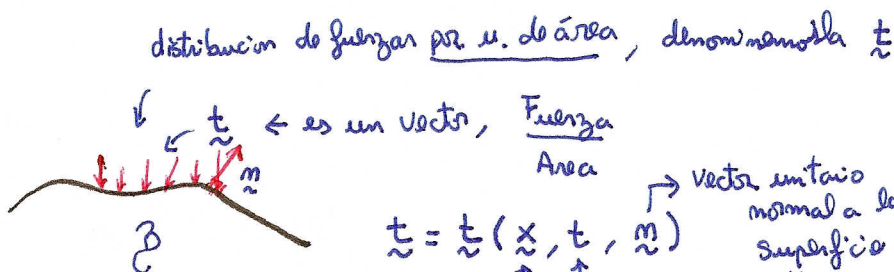
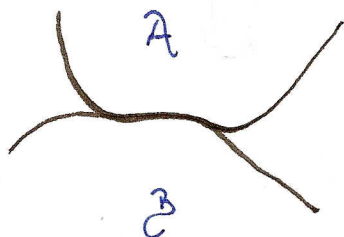
Las fuerzas de superficie se producen por el contacto con otros cuerpos, actúan solo sobre la superficie del cuerpo

∂B
notación para la superficie del cuerpo

Las fuerzas de cuerpo actúan a distancia y actúan sobre cada posición del cuerpo, sea por unidad de volumen o unidad de masa. Ej. la fuerza debido a la gravedad $g dm$, las fuerzas debido a campos electromagnéticos.

Vector esfuerzo (Cauchy)

Modelamiento de las fuerzas de superficie



distribución de fuerzas por u. de área, denominamosla $\underline{t}$

$\underline{t}$ es un vector, $\frac{\text{Fuerza}}{\text{Area}}$

$$\underline{t} = \underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n})$$

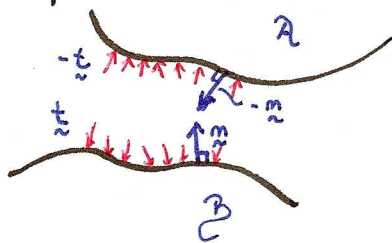
depende de la posición

cambia en el tiempo

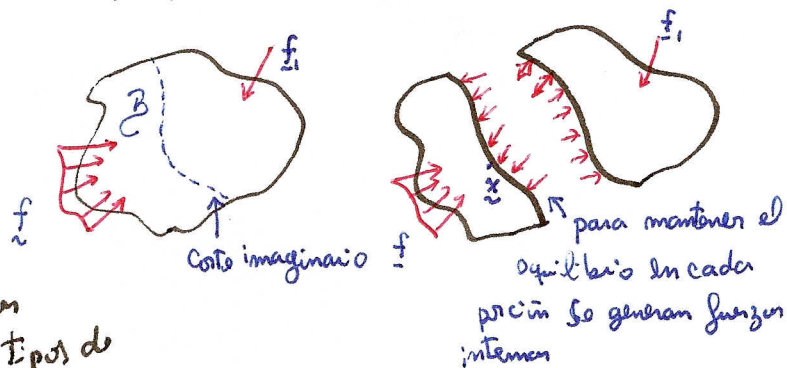
Vector unitario normal a la superficie en $\underline{x}$

¿Por qué t depende en m ?

→ por el principio de acción y reacción

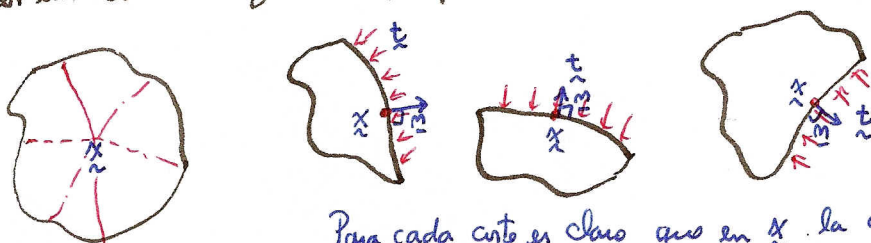


→ Queremos examinar las "fuerzas internas" que generan la deformación de un cuerpo



→ Estas fuerzas internas son en realidad los mismos tipos de fuerza de superficie t mencionada anteriormente

→ Para un mismo punto x en el interior de B hay infinitas maneras de hacer un corte imaginario que pase por ese punto



Para cada corte es claro que en x la distribución de fuerzas internas va a ser diferente, por lo tanto t debe depender en un parámetro que tenga que ver con la "orientación" del corte imaginario, y este parámetro es m

⇒ Asumir que $t = t(x, t, m)$ se conoce como la "hipótesis de Cauchy."

→ Ojo, se asume que el vector esfuerzo en un punto x no se ve "afectado" por el estado de fuerzas en otras zonas del cuerpo de manera explícita ⇒ efecto local.

Leyes de Euler

→ fuerzas de superficie $\underline{t}$ → fuerzas de cuerpo $\underline{b} \leftarrow \frac{\text{Fuerza}}{\text{masa}}$
 $\underline{t}$, $\underline{b}$ son densidades de fuerza por u. de superficie y u. de volumen

→ Fuerza total actuando en el cuerpo $\mathcal{B}$ con borde o superficie $\partial\mathcal{B}$

$$\underline{f}_T = \underline{f}_t + \underline{f}_b \quad \text{donde} \quad \underline{f}_t = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \underline{t} \, da$$

$\mathcal{B}_t$ configuración deformada

$$\underline{f}_b = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \underline{b} \, dv$$

$\xrightarrow{\quad dm \quad}$

→ Momento angular (torque) causado por $\underline{t}$, $\underline{b}$

$$\underline{h}_T = \underline{h}_t + \underline{h}_b \quad \leftarrow \text{se calcula c/n a una referencia } \underline{x}_0$$

$$\underline{h}_t = \int_{\partial\mathcal{B}_t} (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{t} \, da$$

$$\underline{h}_b = \int_{\mathcal{B}_t} (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \rho \underline{b} \, dv$$

⇒ No consideraremos el caso de momentos o torques puros
• Las fuerzas puntuales se podrían considerar si las integrales $\int_{\partial\mathcal{B}_t}$ se extendieran en el sentido de Lebesgue.

Conservación de momentum lineal

Cantidad de momentum lineal acumulado por el cuerpo

$$\underline{m} = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \underline{\dot{x}} \, dv \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \underline{\dot{x}} & m \\ \uparrow & \nwarrow \\ \text{velocidad} & \text{masa} \end{matrix}$$

este no es masa es momentum lineal

1era Ley Euler

$$\underline{f}_T = \dot{\underline{m}}$$