Tensor covariante de orden 2

Sean $\underline{A}, \underline{B}$ dos tensores de orden 2. $\underline{A}, \underline{B}$ son tensores con componentes covariantes de orden 2 si:

$$B_{i_1 i_2} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial y^{i_2}} A_{\alpha_1 \alpha_2}$$

ojo, suma multiple en α_1, α_2

Tensor contravariante de 1er orden

$\underline{A}, \underline{B}$ tensores con componentes contravariantes si

$$B^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha$$

Tensor contravariante de orden 2

$\underline{A}, \underline{B}$ tensores componente contravariantes de orden n si

$$B^{i_1 i_2} = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial y^{i_2}}{\partial x^{\alpha_2}} A^{\alpha_1 \alpha_2}$$

Tensor mixto covariante n, contravariante orden s

$\underline{A}, \underline{B}$ si:

$$B^{j_1 j_2 \cdots j_s}_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial y^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_n}}{\partial y^{i_n}} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \frac{\partial y^{j_2}}{\partial x^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}} A^{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s}_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$$

Sea un vector $\underline{v}$ y un tensor de segundo orden $\underset{\sim}{T}$. Sea una base $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ para el espacio, y su "recíproca" $\{\underset{\sim}{e}_j\}$ definido de

$$\underset{\sim}{e}^i \cdot \underset{\sim}{e}_j = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\underline{v} = v_i \underline{e}^i \quad \text{o} \quad \underline{v} = v^i \underline{e}_i$$

$$\underline{T} = T_{ij}\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j \qquad \underline{T} = T^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\underline{T} = T_i^{\ j}\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}_j \qquad \underline{T} = T^i_{\ j}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j$$

ojo la disposición de i, j

Derivada, gradiente y otras operaciones en Coordenadas curvilíneas

Aquí se trabajará con dos sistemas $\{x^1, x^2, x^3\}$ curvilíneo, y $\underline{x} \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ Cartesiano

Sea $\quad x^i = \psi^i(\underline{x}) \quad i=1,2,3$ una transformación de Coordenadas

Se asume existe ψ^{-1} tal que

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\psi}^{-1}(x^1, x^2, x^3) \mapsto x_i = (\psi^{-1})_i(x^1, x^2, x^3)$$

Ejemplo $x^1 \to r \quad x^2 \to \theta \quad x^3 \mapsto z$

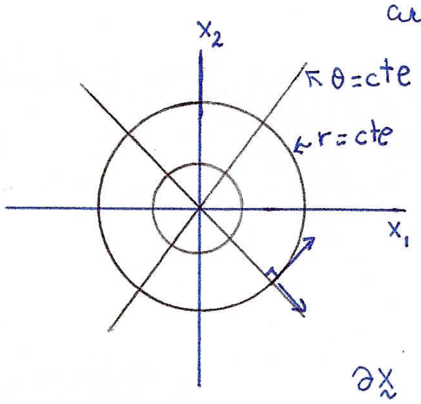
$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta \\ x_2 &= r\sin\theta \\ x_3 &= z \end{aligned} \Bigg\} \ \underline{\psi}^{-1}$$

Base natural

La posición de un punto está dada por

$\underset{\sim}{x} = \underline{\psi}^{-1}(x^1, x^2, x^3) \quad$ si $\quad x^2, x^3$ son constantes

$\Rightarrow \underset{\sim}{x} = \psi^{-1}(x^1)$ es una curva que define la forma del sistema de coordenadas curvilíneo



$x_1 = r\cos\theta$
$x_2 = r\sin\theta$

Los vectores tangentes a estas "curvas" son

$\dfrac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial x^i}$ } ← este vector forma una base natural (no necesariamente unitaria u ortogonal) para el sistema de coordenadas curvilíneo.

$\Downarrow$

$\left\{ \dfrac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial x^1}, \dfrac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial x^2}, \dfrac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial x^3} \right\} \to$ es la base $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ para este sistema de Coordenadas

es un vector y lo denominamos $\underset{\sim}{g}_i$

$$\underset{\sim}{g}_i \overset{def}{=} \frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial x^i}$$

Por otra parte la base "recíproca" de $\{\underline{g}_i\}$, que denotamos $\{\underline{g}^i\}$ se puede calcular de

$$x^i = \psi^i(\underline{x})$$

componentes

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{g}^i \overset{def}{=} \text{grad}\, \psi^i(\underline{x}) \;\mapsto\; \frac{\partial \psi^i}{\partial x_j}$$

es fácil ver

$$\underline{g}^i \cdot \underset{\sim}{g}_j = \underbrace{\text{grad}\, \psi^i(\underline{x})}_{\frac{\partial x^i}{\partial \underline{x}}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$$

Significado de $\underline{g}^i$:

ejemplo

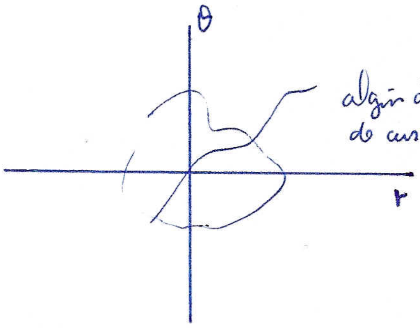
$x_1 = r\cos\theta$ $\quad r, \theta, z \to x^1, x^2, x^3$

$x_2 = r\sin\theta$

$x_3 = z$ $\quad \Rightarrow \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad z = x_3$

Plano r, θ



algún tipo de curva y $\underline{g}^i$ es la tangente a estas curvas

manteniendo sea x_1, x_2 o x_3 constantes

Sea $f = f(\underline{x}) \qquad f(x_i)$

$$\text{grad}\, f \overset{?}{=} \quad \text{si} \quad x^i = \psi^i(\underline{x})$$

$\downarrow$

$$f = f(x^i = \psi^i(\underline{x}))$$

$\Downarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial \psi^i}{\partial x_j}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\text{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, \underline{g}^i}$$

recordar que en Coordenadas Cartesianas teníamos

$$\text{grad}\, f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \underline{e}_i$$

"Tensor" métrico

$$g_{ij} = \underset{\sim}{g}_i \cdot \underset{\sim}{g}_j = \frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial x^j} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i} \frac{\partial x_n}{\partial x^j}$$

↙ Suma en $n = 1, 2, 3$

↑ covariante

$$g^{ij} = \underset{\sim}{g}^i \cdot \underset{\sim}{g}^j$$

↑ contravariante

igualmente podemos definir los "tensores" mixtos $g^i{}_j$, $g_i{}^j$

Derivada de la base

$$\underset{\sim}{g}_i \overset{def}{=} \frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{\partial \underset{\sim}{g}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \underset{\sim}{x}}{\partial x^i \partial x^j} \overset{\text{continuity}}{=} \frac{\partial \underset{\sim}{g}_j}{\partial x^i}$$

Símbolos de Christoffel

Se define $\Gamma^k_{ij}(\underset{\sim}{x})$ ($[ij, k]$) ("1er" símbolo de Christoffel)

$$\frac{\partial \underset{\sim}{g}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}(\underset{\sim}{x})\, \underset{\sim}{g}_k$$

pero $\underset{\sim}{g}_k \cdot \underset{\sim}{g}^k = 1 \Rightarrow \boxed{\Gamma^k_{ij}(\underset{\sim}{x}) = \frac{\partial \underset{\sim}{g}_i}{\partial x^j} \cdot \underset{\sim}{g}^k}$

pero $\underset{\sim}{g}_i \cdot \underset{\sim}{g}^j = \delta^j_i \Rightarrow \frac{\partial \underset{\sim}{g}_i}{\partial x^l} \cdot \underset{\sim}{g}^j + \underset{\sim}{g}_i \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{g}^j}{\partial x^l} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial \underset{\sim}{g}_i}{\partial x^l} \cdot \underset{\sim}{g}^j = - \underset{\sim}{g}_i \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{g}^j}{\partial x^l}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^k_{ij} = -\underset{\sim}{g}_i \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{g}^k}{\partial x^j}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \underset{\sim}{g}^i}{\partial x^j} = -\Gamma^i_{jk}\, \underset{\sim}{g}^k}$$

↖ es sólo la "derivada" en x^j

(Coordenadas curvilíneas)

Derivada de un vector

Sea un vector $\underset{\sim}{v}$

$$\underset{\sim}{v} = v_i\, \underset{\sim}{g}^i$$

representación covariante

recordar que $\{\underset{\sim}{g}^i\}$ (o $\{\underset{\sim}{g}_i\}$) eran una base para el sistema de coordenadas curvilíneas aquí es la derivada en x^j pero como gradiente, es decir se agrega el "vector" $\otimes \underline{g}^j$ como en la primera parte de esta expresión

$$\nabla\otimes\underline{V} = \underbrace{(\nabla\otimes V_i)}_{\frac{\partial V_i}{\partial x^j}\otimes \underline{g}^j}\, \underline{g}^i + V_i\, \underbrace{\nabla\otimes\underline{g}^i}_{-\Gamma^i_{jk}\,\underline{g}^k\otimes\underline{g}^j}$$

derivada en x^j

hacer la analogía con Cartesianas

$\underline{g}^j$ se ubica al final

por eso hay gente que lo denota $\underline{V}\nabla$ ← porque se aplica por "detrás" a $\underline{V}$

$$= \frac{\partial V_i}{\partial x^j}\,\underline{g}^i\otimes\underline{g}^j - \Gamma^i_{jk}\,V_i\,\underline{g}^k\otimes\underline{g}^j$$

← i, j, k son "mudos"

$$= \left(\frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ji}\,V_k\right)\underline{g}^i\otimes\underline{g}^j$$

Derivada de un tensor de 2do orden

Sea $\underline{T} = \underbrace{T_{ij}}_{\text{Covariante}}\,\underline{g}^i\otimes\underline{g}^j$

$$\nabla\otimes\underline{T} = \underbrace{(\nabla\otimes T_{ij})}_{\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k}\otimes\underline{g}^k}\,\underline{g}^i\otimes\underline{g}^j + T_{ij}\,\underbrace{\nabla\otimes(\underline{g}^i\otimes\underline{g}^j)}_{(\nabla\otimes\underline{g}^i)\otimes\underline{g}^j + \underline{g}^i\otimes(\nabla\otimes\underline{g}^j)}$$

Va al final

hacer analogía con Cartesianas

$$\underbrace{(\nabla\otimes\underline{g}^i)}_{\underbrace{\frac{\partial \underline{g}^i}{\partial x^k}}_{-\Gamma^i_{kl}\,\underline{g}^l}\otimes\underline{g}^k} \qquad \underbrace{(\nabla\otimes\underline{g}^j)}_{\underbrace{\frac{\partial \underline{g}^j}{\partial x^k}}_{-\Gamma^j_{kl}\,\underline{g}^l}\otimes\underline{g}^k}$$

Va al final

Va en la misma posición en que aparece

$$= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k}\,\underline{g}^i\otimes\underline{g}^j\otimes\underline{g}^k - T_{ij}\,\Gamma^i_{kl}\,\underline{g}^l\otimes\underline{g}^j\otimes\underline{g}^k - T_{ij}\,\Gamma^j_{kl}\,\underline{g}^i\otimes\underline{g}^l\otimes\underline{g}^k$$

índices "mudos"

$$= \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - T_{lj}\,\Gamma^l_{ki} - T_{il}\,\Gamma^l_{kj}\right)\underline{g}^i\otimes\underline{g}^j\otimes\underline{g}^k$$

Se define

$$\boxed{\begin{aligned} V_{i/j} &\equiv \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ji}\,V_k \\ T_{ij,k} &\equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - T_{lj}\,\Gamma^l_{ki} - T_{il}\,\Gamma^l_{kj} \end{aligned}}$$

Se puede repetir el mismo proceso para $\underline{V}$, $\underline{T}$ escritos como o en componentes contravariantes o mixtas

La componente física

sea un vector $\underline{V} = v_i \, \underset{\sim}{g}^i = v_1 \underline{g}^1 + v_2 \underline{g}^2 + v_3 \underline{g}^3$

$\underline{g}^i$ no son unitarios en general. "Tensor" métrico $g^{ij} = \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j$

$\Rightarrow$ el "módulo" de $\underline{g}^i$ es $|\underline{g}^i| = \sqrt{g^{ii}}$ aquí no hay suma en i

entonces

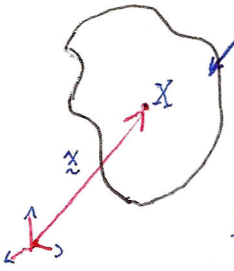
$$v_i \, \underline{g}^i = \underbrace{v_i \sqrt{g^{ii}}}_{\hat{v}_i} \; \underbrace{\frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} \underline{g}^i}_{\hat{\underline{g}}^i} = \underset{\sim}{\hat{v}_i} \, \hat{\underline{g}}^i$$

Componentes física del vector

Lo mismo se puede definir para los tensores

Cinematica

Mecánica de Solidos



posición ocupada por un cuerpo en el instante t

$\underset{\sim}{x} \leftarrow$ Vector

X particula en el cuerpo $\mathcal{B}$

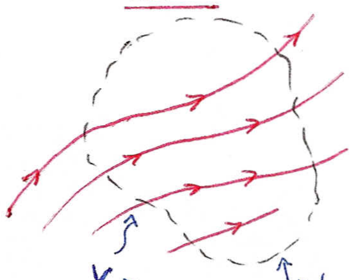
$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(X, t)$

↑ es función

↖ "Lagrange"

(El concepto es mas complejo)

mecánica de Fluidos



$\mathcal{X}$ ↖ Campo de velocidades en cada punto del espacio

↑ Volumen de control "arbitrario"

↑ "Euler"

↦ Trabajaremos con este concepto ⇑ pero despues se vera la extensión a fluidos

$\mathcal{B} \leftarrow$ cuerpo

X cualquier particula en el cuerpo

↖ "nombre" de una particula

$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(X, t) \leftarrow$ posición de cada particula X en $\mathcal{B}$ para un instante t cualquiera

↦ Para definir la "deformación", se necesita "comparar" de alguna manera $\underset{\sim}{\chi}(X,t)$ con la posicion ocupada por las particulas respecto a una "referencia"

Sea $t = t_0$ fijo, denotamos $\underset{\sim}{X}$ la posición de cada particula X para ese instante

$$\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{\kappa}(X) \quad \longleftrightarrow \quad \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{\chi}(X, t_0)$$

↑ función vectorial ↖ no depende del tiempo ⟷ es equivalente

↦ El cuerpo para el instante t cualquiera se denomina "Configuración deformada" y se denota $\mathcal{B}_t$ $\boxed{\underset{\sim}{x} \quad \mathcal{B}_t}$ $\quad \underset{\sim}{\kappa}_t(\mathcal{B}) \leftarrow$ Rajagopal

↦ El cuerpo para el instante t_0 se denomina "Configuración de referencia" y se denota $\mathcal{B}_\kappa$ $\boxed{\underset{\sim}{X} \quad \mathcal{B}_\kappa}$ $\quad \underset{\sim}{\kappa}_\kappa(\mathcal{B})$

⇒ La configuración de referencia puede definirse para $t=0$ (inicio del proceso). Si además para ese instante el cuerpo no estaba deformado, esa configuración también se llama "Configuración no-deformada".

⇒ Si además en esa configuración no hay fuerzas externas ni esfuerzos residuales, entonces se llama "stress-free configuration"

⇒ $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ a veces se denomina la "deformación"

La función $\mathbf{k}(\mathbf{X})$ se asume invertible, tal que

$$\mathbf{X} = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{X})$$

↑ se obtiene la partícula que ocupa esa posición

↑ se da la posición

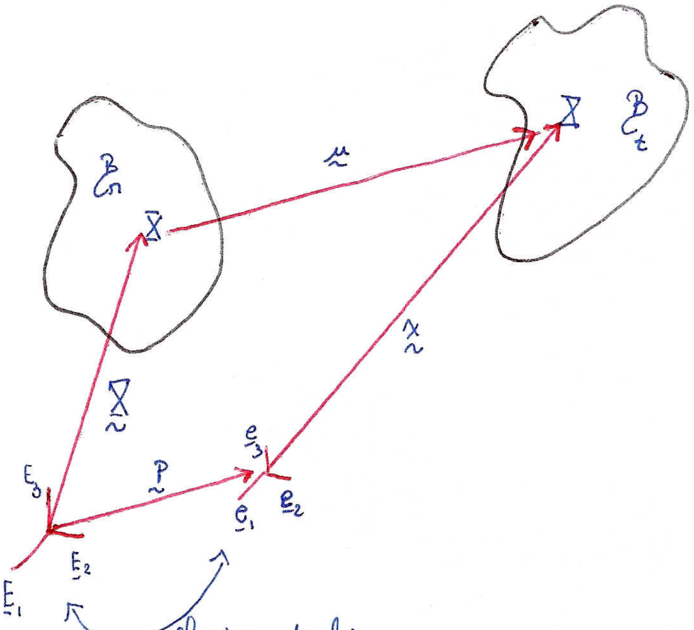
$$\Rightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{k}^{-1}(\mathbf{X}), t)$$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{X}, t)$$

↑↑ la función $\boldsymbol{\chi}$ depende de la configuración de referencia

En general se omite $\mathbf{k}$, y se escribe

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$$



el origen de los sistemas coordenados para $\mathbf{X}$ y $\mathbf{x}$ puede ser el mismo

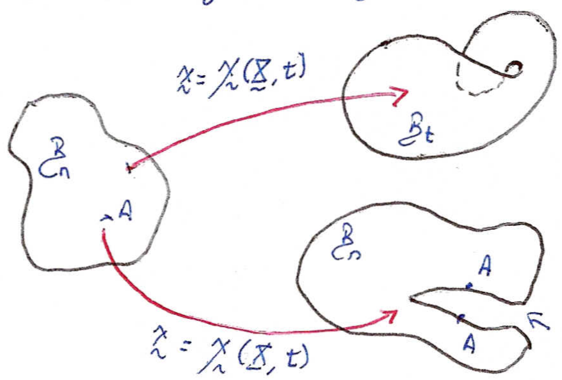
$$\mathbf{X} + \mathbf{u} = \mathbf{P} + \mathbf{x}$$

↑ fijo y en general $\mathbf{P} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

↑ campo de desplazamientos

↦ Para cualquier t se asume $\chi(X, t)$ suave, es decir no se producen las siguientes deformaciones



⇐ autopenetración

⇐ rotura (caso especial, fractura)

↖ dos posición para la misma partícula A

Gradiente de deformación

Define $\underset{\sim}{F}$ tensor 2do orden, gradiente de deformación

$$\underset{\sim}{F} = \mathrm{Grad}\, \underset{\sim}{\chi}$$

↑ Gradiente c/r a $\underset{\sim}{X}$

Otras notaciones

$$\underset{\sim}{F} = \frac{\partial \underset{\sim}{\chi}}{\partial \underset{\sim}{X}} \qquad \underset{\sim}{F} = \nabla_{\underset{\sim}{X}}\, \underset{\sim}{\chi}$$

Coordenadas Cartesianas

$$F_{ij} = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_j}$$

↦ a veces se reemplaza el símbolo $\underset{\sim}{\chi}$ por $\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{F} = \frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{X}}$, $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$, etc.

⇒ La función $\underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{X}, t)$ es C^2 ⇐ continua hasta la segunda derivada, invertible.

Define $J = \det \underset{\sim}{F}$ ⇐ "Jacobiano de la transformación"

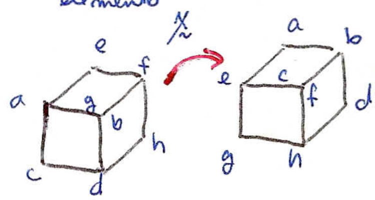
Se asume $0 < J < \infty$

↑ ningún tipo de fuerza puede deformar un cuerpo finito en un punto

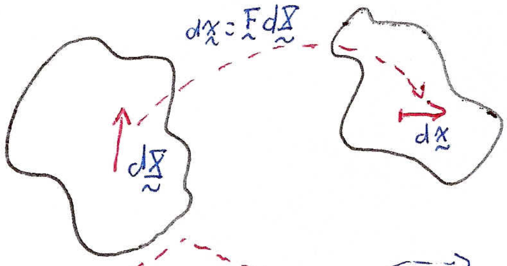
↑ ningún tipo de fuerza transforma un cuerpo finito en algo infinito en tamaño

$J \not< 0$

↑ no hay inversión de un elemento

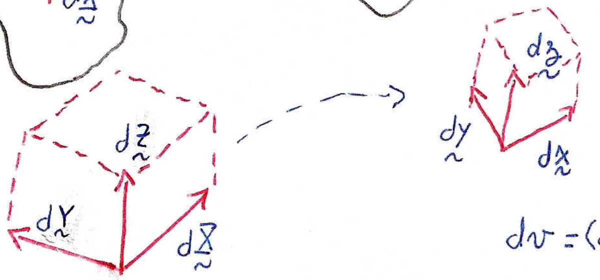


Transformación de un elemento de volumen



$$d\underset{\sim}{x} = \frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{X}}\, d\underset{\sim}{X} = \underline{F}\, d\underset{\sim}{X}$$

$$(d\underset{\sim}{X}, d\underset{\sim}{Y}, d\underset{\sim}{Z}) = \begin{pmatrix} dX_1 & dX_2 & dX_3 \\ dY_1 & dY_2 & dY_3 \\ dZ_1 & dZ_2 & dZ_3 \end{pmatrix}$$



$$dv = (d\underset{\sim}{x} \times d\underset{\sim}{y}) \cdot d\underset{\sim}{z} = \det(d\underline{x}, d\underline{y}, d\underline{z})$$

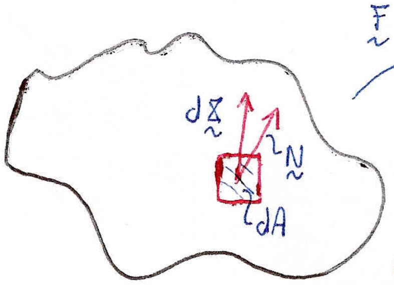
$$dV = (d\underset{\sim}{X} \times d\underset{\sim}{Y}) \cdot d\underset{\sim}{Z} = \det(d\underset{\sim}{X}, d\underline{Y}, d\underline{Z}) = \det \begin{pmatrix} dX_1 & dX_2 & dX_3 \\ dY_1 & dY_2 & dY_3 \\ dZ_1 & dZ_2 & dZ_3 \end{pmatrix}$$

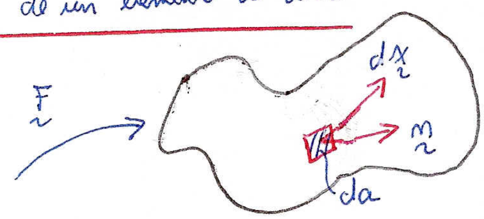
pero $d\underline{x} = \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{X}$ $\quad d\underset{\sim}{y} = \underline{F}\, d\underset{\sim}{Y}$ $\quad d\underset{\sim}{z} = \underline{F}\, d\underset{\sim}{Z}$

$$\Rightarrow dv = \det \underbrace{\begin{pmatrix} F_{1j}\, dX_j & F_{2j}\, dX_j & F_{3j}\, dX_j \\ F_{1j}\, dY_j & F_{2j}\, dY_j & F_{3j}\, dY_j \\ F_{1j}\, dZ_j & F_{2j}\, dZ_j & F_{3j}\, dZ_j \end{pmatrix}}_{(d\underset{\sim}{X},\, d\underset{\sim}{Y},\, d\underset{\sim}{Z})\, \underset{\sim}{F}^T} = \underbrace{\det(d\underset{\sim}{X}, d\underline{Y}, d\underline{Z})}_{dV}\ \underbrace{\det \underline{F}^T}_{= \det \underline{F} = J}$$

$$\Rightarrow \boxed{dv = J\, dV}$$

Transformación de un elemento de área





$\underline{N}$: normal unitaria a dA en $\mathcal{B}_0$

$d\underline{A} \equiv dA\, \underline{N}$

$\underset{\sim}{n}$: normal unitaria a da en $\mathcal{B}_t$

$d\underline{a} \equiv da\, \underline{n}$

$\underline{N}\, dA = d\underline{Y} \times d\underline{Z}$ ← por ejemplo

$d\underset{\sim}{X}$, $d\underline{x}$ un vector cualquiera (infinitesimal) en el cuerpo que no estan en plano dA y da

$dV = d\underset{\sim}{X} \cdot \underline{N}\, dA \qquad dv = d\underset{\sim}{x} \cdot \underline{n}\, da$

$dv = J\, dV \Rightarrow \quad d\underset{\sim}{x} \cdot d\underset{\sim}{a} = J\, d\underset{\sim}{X} \cdot d\underline{A}$ $\qquad$ pero $d\underline{x} = \underline{F}\, d\underline{X}$

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{F}\, d\underline{X} \cdot d\underline{a}}_{F_{ij}\, dX_j\, da_i \,\equiv\, d\underset{\sim}{X} \cdot \underset{\sim}{F}^T d\underline{a}} = J\, d\underline{X} \cdot d\underline{A}$$

$d\underline{X}$ arbitrario $\Rightarrow \quad \underline{F}^T d\underline{a} = J\, d\underline{A} \Rightarrow \boxed{d\underline{a} = J\, \underline{F}^{-T} d\underline{A}}$ $\quad$ Formula de Nanson