Mecánica de medios Continuos

1) Tensores
2) Cinematica
3) Fuerzas
4) Balance de masa y termodinámica
5) Ecuaciones constitutivas
6) Sólidos Elásticos
7) Fluidos

Bibliografía

- P. Chadwick, "Continuum Mechanics: Concise theory and Problems"
- ✓ I. S. Sokolnikoff, "Tensor Analysis"
- ✓ R. W. Ogden, "Non-linear elastic deformations"
- ✓ C. Truesdell, "The elements of Continuum mechanics"
- C. Truesdell, "A first course in rational continuum mechanics"
- C. Truesdell, K.R. Rajagopal, "An introduction to the mechanics of fluids"

Mecanica de medios continuos ME701

Roger Bustamante

Martes 18:00 ↦ 19:30

Jueves 18:00 ↦ 19:30

Controles

1 control C1

13 noviembre

Tareas

7 tareas

se elimina la peor nota

PT promedio tarea

Promedio = C1 × 30% + PT × 70%

Examen eximen

$C_1 \geq 5.5$

$PT \geq 5.0$

Con examen

$$\left(\frac{C_1 + EX}{2}\right) \times 30\% + PT \times 70\%$$

↦ ¿ Que es mecánica del medio Continuo ?

- En mecánica de solidos, de fluidos, transferencia de calor y en otras áreas surgen algunos conceptos que se repiten, "balance de masa", flujo", Se asume por ejemplo que un fluido o un solido se puede modelar como un Continuo, es decir las 'propiedades' del material son funciones continuas (por tramos).

- Mecánica del medio continuo es una teoría matematica que permite tratar en una forma general y unificada el problema de modelar matematicamente el comportamiento de solidos elasticos, comportamiento plástico, viscoelastico, y el comportamiento de los fluidos

Tensores

Notación

Vector $\underset{\sim}{v}$ ← letra latina minúscula (hay algunas excepciones)

escalar α ← letra griega

tensor $\underset{\sim}{T}$ ← letra latina mayúscula

cuerpo $\mathcal{B}$ ← letra latina cursiva

espacios, reales, etc $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}$

Espacios Euclideanos

Espacio vectorial Euclideano $\mathbb{E}$, $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{E}$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$ $\qquad (\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}) \cdot \underline{w} = \alpha(\underline{u} \cdot \underline{w}) + \beta(\underline{v} \cdot \underline{w})$

$\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{u} \geq 0$

norma $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$

Producto vectorial (producto cruz)

$\underline{u} \times \underline{v}$

Coordenadas cartesianas

$\{\underset{\sim}{e}_i\}$ base para $\mathbb{E}$ $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{e}_i$ son linealmente independientes

base ortonormal

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

sea $\underline{u} \in \mathbb{E}$, u_i ← componente de $\underline{u}$ escrito en $\{\underline{e}_i\}$

$$\underline{u} = u_i \underset{\sim}{e}_i$$

↳ Convencion: Cuando en una expresión los indices se repiten ⇒ se asume suma en ese indice ⇒ $u_i \underline{e}_i = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3$

Delta de Kronecker δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Símbolo de permutación ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk \text{ permutación cíclica } 123,\ 312 \dots \\ -1 & ijk \text{ permutación anti-cíclica } 321,\ 132 \dots \\ 0 & \text{se repite un índice} \end{cases}$$

$\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{E}$, $\{\underline{e}_i\}$, u_i, v_i las componentes de $\underline{u}, \underline{v}$ con $\{\underline{e}_i\}$ en $\mathbb{E}$

producto cruz $$\underline{u} \times \underline{v} = \varepsilon_{ijk}\, u_i\, v_j\, \underline{e}_k$$

Cambio de base

Sean las bases $\{\underline{e}_i\}$, $\{\underline{e}'_i\}$ para el mismo espacio $\mathbb{E}$. Los vectores $\{\underline{e}'_i\}$ se pueden escribir en la base $\{\underline{e}_i\}$

$$\left.\begin{aligned} \underline{e}'_1 &= Q_{11}\underline{e}_1 + Q_{12}\underline{e}_2 + Q_{13}\underline{e}_3 \\ \underline{e}'_2 &= Q_{21}\underline{e}_1 + Q_{22}\underline{e}_2 + Q_{23}\underline{e}_3 \\ \underline{e}'_3 &= Q_{31}\underline{e}_1 + Q_{32}\underline{e}_2 + Q_{33}\underline{e}_3 \end{aligned}\right\} \quad \underline{e}'_i = Q_{ij}\,\underline{e}_j \quad (*)$$

Suma en j para cada $i=1,2,3$

$\{\underline{e}_i\}$, $\{\underline{e}'_i\}$ ortonormales $\Rightarrow$ $\underline{e}'_i \cdot \underline{e}'_k = \delta_{ik}$

$$\Downarrow$$

$$Q_{ij}\,\underline{e}_j \cdot Q_{kl}\,\underline{e}_l = \delta_{ik}$$

$$Q_{ij}\,Q_{kl}\,\underbrace{\underline{e}_j \cdot \underline{e}_l}_{\delta_{jl}} = \delta_{ik}$$

$$\delta_{jl} = \begin{cases} 0 & j \neq l \\ 1 & j = l \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_{ij}\,Q_{kj} = \delta_{ik}$$

si $[Q]$ es la forma o notación como matriz de Q_{ij}

$$\Rightarrow Q_{ij}\,Q_{kj} = \delta_{ik} \Leftrightarrow [Q][Q]^T = [I]$$

traspuesta   matriz identidad $(AB=I \Rightarrow BA=I)$

$$\Leftrightarrow [Q]^T[Q] = [I]$$

$$\Updownarrow$$

$$Q_{ij}\,Q_{ik} = \delta_{jk}$$

de $(*)$ $\Rightarrow$ $$Q_{ik}\,\underline{e}'_i = \underbrace{Q_{ij}\,Q_{ik}}_{\delta_{jk}}\,\underline{e}_j = \underline{e}_k$$

Sea $\underline{v} \in \mathbb{E}$ tal que $\underline{v} = v'_j \underline{e}'_j$ $\underline{v} = v_i \underline{e}_i$, entonces

$$\Rightarrow v_i \underline{e}_i = v'_j \underline{e}'_j \Rightarrow v_i Q_{ki} \underline{e}'_k = v'_j \underline{e}'_j$$

$$\Rightarrow v_i Q_{ki} \underbrace{\underline{e}'_k \cdot \underline{e}'_j}_{\delta_{kj}} = v'_j \Rightarrow v'_j = Q_{ji} v_i$$

$$\Downarrow$$

$$v_i \underline{e}_i = v'_j Q_{jk} \underline{e}_k$$

$$\Rightarrow v_i \underline{e}_i \cdot \underline{e}_i = v'_j Q_{jk} \overbrace{\underline{e}_k \cdot \underline{e}_i}^{\delta_{ki}}$$

$$\Rightarrow v_i = Q_{ji} v'_j$$

Tensores en coordenadas cartesianas

Sea el espacio vectoriale $\mathbb{E}$, un tensor $\underset{\sim}{T}$ (→ de segundo orden) es una transformación lineal de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{E}$

nota: Como veremos despues, el concepto del tensor es mas general para coordenadas curvilineas

$$\underline{v} \in \mathbb{E} \Rightarrow \overbrace{\underline{u} = \underline{T}\,\underline{v}}^{\underline{T}\underline{v} = \underline{u} \in \mathbb{E}} \in \mathbb{E}$$

T_{ij} ← componente de $\underline{T}$ en coordenadas $\{\underline{e}_i\}$

fila ↗ ↖ columna

Producto tensorial

Sean $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{E}$, se define $\otimes$

$$(\underline{u} \otimes \underline{v})\,\underline{w} = (\underline{v} \cdot \underline{w})\,\underline{u} \qquad \forall\ \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$$

$$u_i \quad v_j \Rightarrow (\underline{u} \otimes \underline{v})_{ij} = u_i v_j \rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix}$$

Significado

Sean $\underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{m}$, $\underline{m}$ vector arbitrario

$$(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)\,\underline{m} = \underbrace{(\underline{e}_j \cdot \underline{m})}_{m_j}\,\underline{e}_i \quad \leftarrow \text{por definición}$$

$$\Rightarrow T_{ij}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)\,\underline{m} = \underbrace{T_{ij}\, m_j\, \underline{e}_i}_{\underline{T}\,\underline{m}}$$

$\underline{T}\underline{m} \in \mathbb{E}$

$\underbrace{(\underline{T}\underline{m}) \cdot \underline{e}_i}_{T_{ij} m_j}\ \underline{e}_i$

$\underline{T}\,\underline{m}$ → representado en la base $\{\underline{e}_i\}$

$$\Rightarrow (T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)\,\underline{m} = \underline{T}\,\underline{m}$$

$\underline{m}$ arbitrario

$$\underset{\sim}{u} = u_i \underset{\sim}{e}_i \qquad \Rightarrow \underline{T} = \underbrace{T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j}_{\text{representación de } \underline{T} \text{ en } \mathbb{E} \times \mathbb{E}}$$

↖ vector tensor ↗

Transformación de $\underline{T}$ por cambio de $\{\underline{e}_i\} \to \{\underline{e}_i'\}$

Sean $\underline{n} \in \mathbb{E}$ y $\underline{t} = \underline{T}\,\underline{n} \in \mathbb{E}$, y sean t_i, T_{ij}, n_j en $\{e_i\}$

y t_i', T_{ij}', n_j' componentes en la base $\{e_j'\}$

$$\Rightarrow \quad t_i = T_{ij} n_j \qquad t_i' = T_{ij}' n_j'$$

pero $t_i' = Q_{ip} t_p \qquad n_j' = Q_{jk} n_k$

$$\Rightarrow \quad Q_{ip} \underbrace{t_p}_{T_{pm} n_m} = T_{ij}' Q_{jk} n_k$$

$$\Rightarrow \quad Q_{ip} T_{pm} n_m = T_{ij}' Q_{jk} n_k$$

$[Q]^T[Q] = [Q][Q]^T = [I]$

$$\underbrace{Q_{in} Q_{ip}}_{\delta_{np}} T_{pm} n_m = Q_{in} T_{ij}' Q_{jk} n_k$$

$$T_{pm} \underbrace{n_m}_{\text{mudo}} = Q_{ip} T_{ij}' Q_{jk} \underbrace{n_k}_{\text{índice "mudo"}}$$

$$\Rightarrow \quad T_{pm} = Q_{ip} T_{ij}' Q_{jm}$$

y

$$Q_{dp} T_{pm} Q_{qm} = \underbrace{Q_{dp} Q_{ip}}_{\delta_{di}} T_{ij}' \underbrace{Q_{jm} Q_{qm}}_{\delta_{jq}}$$

$$\Rightarrow \quad T_{ij}' = Q_{ip} T_{pm} Q_{jm}$$

$$T_{ij}' = Q_{ip} Q_{jm} T_{pm}$$

Tensor de orden superior

2do orden $\quad \underline{T} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

n orden $\quad \underline{T} = T_{i_1 i_2 \dots i_n}\, \underline{e}_{i_1} \otimes \underline{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{i_n}$

1er orden $\to$ es un vector $\quad \underline{v} = v_i \underline{e}_i$

Invariantes de un tensor

se define $\quad \operatorname{tr} \underset{\sim}{T} \overset{\text{def}}{=} T_{ii}$

sea $\quad T_{ij}' = Q_{ip} Q_{jm} T_{pm}$

$$\Rightarrow \quad T_{ii}' = \underbrace{Q_{ip} Q_{im}}_{\delta_{pm}} T_{pm} = T_{pp} \Rightarrow \operatorname{tr} \underset{\sim}{T} \text{ no cambia}$$

$j = i$

con el cambio de $\{\underline{e}_i\}$ a $\{\underline{e}_i'\}$

$$\det \underset{\sim}{T} = \varepsilon_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{k3} = \varepsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{3k}$$

$$\det (\underset{\sim}{T} - \lambda \underset{\sim}{I}) = 0$$

↑ ↑ tensor identidad

Valor propio de $\underset{\sim}{T}$

$\Updownarrow$

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

I_1, I_2, I_3 invariantes de $\underset{\sim}{T}$

$$I_1 = \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[(\operatorname{tr} \underset{\sim}{T})^2 - \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^2 \right]$$

$$I_3 = \det \underset{\sim}{T} = \frac{1}{6} \left[(\operatorname{tr} \underset{\sim}{T})^3 - 3 (\operatorname{tr} \underset{\sim}{T}) (\operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^2) + 2 \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^3 \right]$$

El operador gradiente

El operador se denotara grad o ∇ } "derivada" respecto a $\underset{\sim}{x}$

$\phi(\underset{\sim}{x})$, $\underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})$ y $\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x})$ un campo escalar, vectorial y tensorial

grad $\phi(\underset{\sim}{x})$; $\nabla \phi(\underset{\sim}{x})$ define
$$\nabla \phi(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{a} = \frac{d}{dt} \phi(\underset{\sim}{x} + t\underset{\sim}{a}) \Big|_{t=0} \quad \forall \underset{\sim}{a} \in \mathbb{E}$$

grad $\underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})$; $\nabla \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})$ se denota $\nabla \otimes \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})$ define
$$(\nabla \otimes \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})) \underset{\sim}{a} = \frac{d}{dt} \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x} + t\underset{\sim}{a}) \Big|_{t=0} \quad \forall \underset{\sim}{a} \in \mathbb{E}$$

grad $\underset{\sim}{T}(x)$; $\nabla \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x}) \rightarrow \nabla \otimes \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x})$
$$(\nabla \otimes \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x})) \underset{\sim}{a} = \frac{d}{dt} \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x} + t\underset{\sim}{a}) \Big|_{t=0} \quad \forall \underset{\sim}{a} \in \mathbb{E}$$

Coordenadas Cartesianas

$$\nabla \phi(\underset{\sim}{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \underset{\sim}{e}_i \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\nabla \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x}) \text{ o } \nabla \otimes \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$$

$\Downarrow$ se convierte en un tensor de 2^{do} orden

$$\nabla \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x}) \text{ o } \nabla \otimes \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_k$$

$\Downarrow$ se convierte en un tensor de 3^{er} orden

El operador divergencia

se denota div } respecto a $\underline{x}$ o $\nabla \cdot \underline{V}$

$\underline{V}$ vector (campo vectorial)

$$\operatorname{div} \underline{V} \overset{\text{define}}{=} \operatorname{tr}(\nabla \otimes \underline{V})$$

$\underline{T}$ tensor de segundo orden

$$\operatorname{div} \underline{T} \mapsto \nabla \cdot \underline{T}(\underline{x}) \quad , \text{ define}$$

$$(\nabla \cdot \underline{T}(\underline{x})) \cdot \underline{a} = \nabla \cdot (\underline{T}(\underline{x})\,\underline{a}) \quad \forall \underline{a} \in \mathbb{E}$$

$\Uparrow$

ojo, esta no es la única definición posible

Coordenadas cartesianas

$$\operatorname{div} \underline{V} \qquad \nabla \cdot \underline{V} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$$

$$\operatorname{div} \underline{T} \qquad \nabla \cdot \underline{T} \overset{?}{=}$$

Componente k

de la definición $\quad (\nabla \cdot \underline{T})_k \, a_k = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(T_{ij}\, a_j)$

$\underline{a}$ es constante

$$= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}\, a_j$$

$$\Rightarrow (\nabla \cdot \underline{T})_j = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}$$

aquí se intercambia k por j, son índices "mudos", puesto que estaban "sumandose"

↦ En algunos textos se define como

$$(\nabla \cdot \underline{T})_j = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_i}$$

También se podría definir

$$(\nabla \cdot \underline{T})_j = \frac{\partial T_{ii}}{\partial x_j}$$

↦ Se puede ver que el caso de tensores de orden mayor no es sencillo en cuanto a la definición de la divergencia

El operador curl

Sea $\underline{v}(\underline{x})$ un campo vectorial, el operador curl $\underline{v}$, denotado también $\nabla \times \underline{v}$ se define

$$(\nabla \times \underline{v}) \cdot \underline{a} = \nabla \cdot (\underline{v} \times \underline{a}) \quad \forall \underline{a} \in \mathbb{E}$$

No es simple definir el curl $\underline{T}$ de un tensor de 2do o de un orden superior, ver "The classical field theories of mechanics" de C. Truesdell y R. Toupin.

En Coordenadas Cartesianas

$$(\nabla \times \underline{v}) \cdot \underline{a} = (\nabla \times \underline{v})_\ell \, a_\ell$$

$\underline{a}$ constante (δ_{ij})

$$\nabla \cdot (\underline{v} \times \underline{a}) = \nabla \cdot (\varepsilon_{ijk} \, v_i \, a_j \, \underline{e}_k)$$

$\nabla \cdot (\underline{w}) = \nabla \cdot (w_i \underline{e}_i) = \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$

$$= \underbrace{\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\varepsilon_{kij}} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} a_j}_{\left(\varepsilon_{kij} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \underline{e}_j\right) \cdot \underbrace{(a_j \underline{e}_j)}_{\underline{a}}}$$

$$\Rightarrow (\nabla \times \underline{v}) = \varepsilon_{kij} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \underline{e}_j$$

Tensor covariante, contravariante, coordenadas generalizadas

Sean dos sistemas de coordenadas $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ & $\{y^1, y^2, \dots, y^m\}$ (abitrarios), tal que

$$y^i = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{función}}}{y^i}(x^1, x^2, \dots, x^m) \qquad i = 1, \dots, m$$

Sea $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos tensores de primer orden (vectores), $\underline{A}$ escrito en el sistema $\{x^i\}$ y $\underline{B}$ el mismo tensor escrito en el sistema $\{y^j\}$.

Tensor Covariante (1er orden)

$\underline{A}, \underline{B}$ son tensores covariantes (con componentes) de primer orden si

$$B_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} A_\alpha \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{suma}}}{\alpha} : 1, \dots, m \qquad i = 1, \dots, m$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{A} &\to A_i \\ \underline{B} &\to B_i \end{aligned}\right\} \text{componentes}$$