

Problemas de tiempo mínimo para el control de bioreactores

Héctor Ramírez C.

DIM & CMM, Universidad de Chile, Santiago de Chile

Control Óptimo
Semestre Primavera 2009

Planificación

- 1 Introducción
- 2 Modelo Matemático de un Bioreactor
- 3 Formulación del Problema de Tiempo Mínimo

Bioreactores



Bioreactores

- Los **bioreactores** son aparatos utilizados en laboratorios o de manera industrial para trabajar con microorganismos.
- Un bioreactor experimental reproduce una amplia variedad de sistemas que van desde lagos hasta plantas de tratamiento de aguas, pasando por numerosas aplicaciones productivas.
- Podemos describirlo (de manera muy general) como un recipiente con una apertura para que el flujo de material *estéril* entre y una salida para que el flujo resultante del proceso salga (microorganismos, estéril o nutriente, desechos, etc.)

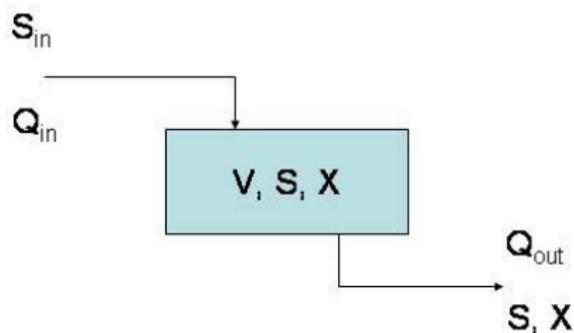
Bioreactores

- Los **bioreactores** son aparatos utilizados en laboratorios o de manera industrial para trabajar con microorganismos.
- Un bioreactor experimental reproduce una amplia variedad de sistemas que van desde lagos hasta plantas de tratamiento de aguas, pasando por numerosas aplicaciones productivas.
- Podemos describirlo (de manera muy general) como un recipiente con una apertura para que el flujo de material *estéril* entre y una salida para que el flujo resultante del proceso salga (microorganismos, estéril o nutriente, desechos, etc.)

Bioreactores

- Los **bioreactores** son aparatos utilizados en laboratorios o de manera industrial para trabajar con microorganismos.
- Un bioreactor experimental reproduce una amplia variedad de sistemas que van desde lagos hasta plantas de tratamiento de aguas, pasando por numerosas aplicaciones productivas.
- Podemos describirlo (de manera muy general) como un recipiente con una apertura para que el flujo de material *estéril* entre y una salida para que el flujo resultante del proceso salga (microorganismos, estéril o nutriente, desechos, etc.)

Distintos Tipos de Bioreactores

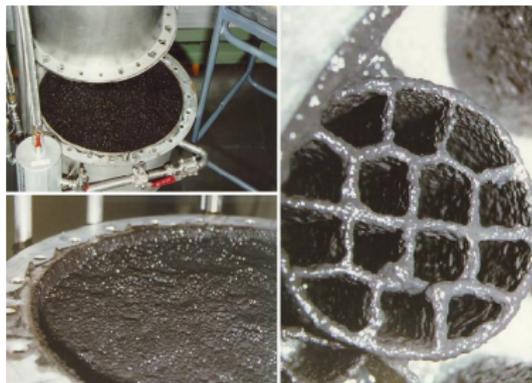


- Modo Continuo o Quimiostato: Flujos $Q_{in} = Q_{out} \neq 0$ y volumen V constante.
- Modo Semi-continuo (o fedbatch): $Q_{in} \neq 0$, $Q_{out} = 0$ y V varía.
- Modo Discontinuo (o batch) : $Q_{in} = 0$, $Q_{out} = 0$ y V constante.
- X y S representan las concentraciones de los microorganismos y del nutriente, respectivamente.
- S_{in} es la concentración del nutriente en el flujo entrante.

Bioreactores Industriales



Bioreactores de Laboratorio



Planificación

- 1 Introducción
- 2 Modelo Matemático de un Bioreactor**
- 3 Formulación del Problema de Tiempo Mínimo

Hipótesis Fundamentales para Nuestro Modelo

- El recipiente del bioreactor está perfectamente mezclado, es decir: el nutriente esta uniformemente distribuido y, en caso de haber más de una especie de microorganismo, estas tienen el mismo acceso al nutriente.
- Así, es razonable pensar que lo que se consume es proporcional a la cantidad de microorganismos, es decir:

$$\text{consumo} = \mu(S) VX, \quad \text{con } \mu(S) \geq 0, \mu(0) = 0.$$

- El crecimiento de los microorganismos es proporcional a lo que se consume. La constante de proporcionalidad será denotada por Y . Esta hipótesis esta validada empíricamente.

Hipótesis Fundamentales para Nuestro Modelo

- El recipiente del bioreactor está perfectamente mezclado, es decir: el nutriente esta uniformemente distribuido y, en caso de haber más de una especie de microorganismo, estas tienen el mismo acceso al nutriente.
- Así, es razonable pensar que lo que se consume es proporcional a la cantidad de microorganismos, es decir:

$$\text{consumo} = \mu(S) VX, \quad \text{con } \mu(S) \geq 0, \mu(0) = 0.$$

- El crecimiento de los microorganismos es proporcional a lo que se consume. La constante de proporcionalidad será denotada por Y . Esta hipótesis esta validada empíricamente.

Hipótesis Fundamentales para Nuestro Modelo

- El recipiente del bioreactor está perfectamente mezclado, es decir: el nutriente esta uniformemente distribuido y, en caso de haber más de una especie de microorganismo, estas tienen el mismo acceso al nutriente.
- Así, es razonable pensar que lo que se consume es proporcional a la cantidad de microorganismos, es decir:

$$\text{consumo} = \mu(S) VX, \quad \text{con } \mu(S) \geq 0, \mu(0) = 0.$$

- El crecimiento de los microorganismos es proporcional a lo que se consume. La constante de proporcionalidad será denotada por Y . Esta hipótesis esta validada empíricamente.

Modelo Matemático de un Bioreactor

Ecuaciones de balance de masa para XV y SV nos llevan a escribir el modelo de un bioreactor como sigue:

$$\begin{cases} \dot{s} &= \frac{Q_{in}}{V}(s_{in} - s) - \mu(s)x, \\ \dot{x} &= [Y\mu(s) - \frac{Q_{in}}{V}]x, \\ \dot{V} &= Q_{in} - Q_{out}. \end{cases}$$

Aquí $(s, x, Q_{in}, Q_{out}, V) \in \mathcal{D} = \mathbb{R}_+^2 \times [0, Q_{\max}] \times [0, Q_{\max}] \times [0, V_{\max}]$, y donde

- 1) $s(t)$ y s_{in} son las concentraciones del nutriente al tiempo t y en el flujo entrante, respectivamente (microgramos por milímetro³; t en horas),
- 2) $x(t)$ es la concentración de la especie al tiempo t (células por milímetro³),
- 3) Q_{in} y Q_{out} son los flujos de entrada y salida, respectivamente (en m³/horas),
- 4) V es el volumen del recipiente (en m³),

Modelo Matemático de un Bioreactor

Ecuaciones de balance de masa para XV y SV nos llevan a escribir el modelo de un bioreactor como sigue:

$$\begin{cases} \dot{s} &= \frac{Q_{in}}{V}(s_{in} - s) - \mu(s)x, \\ \dot{x} &= [Y\mu(s) - \frac{Q_{in}}{V}]x, \\ \dot{V} &= Q_{in} - Q_{out}. \end{cases}$$

Aquí $(s, x, Q_{in}, Q_{out}, V) \in \mathcal{D} = \mathbb{R}_+^2 \times [0, Q_{\max}] \times [0, Q_{\max}] \times [0, V_{\max}]$, y donde

- 5) $D = Q_{in}/V$ es la tasa de dilución del quimiostato (horas^{-1}),
- 6) $\mu(\cdot)$ representa la tasa de crecimiento de la especie (horas^{-1}),
- 7) Y es la constante de la producción de la especie (células por microgramos de nutriente).

Modelo Matemático de un Bioreactor

Con los cambios de variable:

$$\bar{s} = \frac{s}{s_{in}}, \quad \bar{x} = \frac{x}{s_{in}Y}, \quad \bar{\mu}(\bar{s}) = Y\mu(s_{in}\bar{s}),$$

el modelo de para el bioreactor se reescribe como sigue:

$$\begin{cases} \dot{s} &= \frac{Q_{in}}{V}(1-s) - \mu(s)x, \\ \dot{x} &= [\mu(s) - \frac{Q_{in}}{V}]x, \\ \dot{V} &= Q_{in} - Q_{out}. \end{cases}$$

Aquí $(s, x, Q_{in}, Q_{out}, V) \in \mathcal{D} = \mathbb{R}_{++}^2 \times [0, Q_{\max}] \times [0, Q_{\max}] \times [0, V_{\max}]$.

Modelo Matemático de un Bioreactor

Con los cambios de variable:

$$\bar{s} = \frac{s}{s_{in}}, \quad \bar{x} = \frac{x}{s_{in}Y}, \quad \bar{\mu}(\bar{s}) = Y\mu(s_{in}\bar{s}),$$

el modelo de para el bioreactor se reescribe como sigue:

$$\begin{cases} \dot{s} &= \frac{Q_{in}}{V}(1-s) - \mu(s)x, \\ \dot{x} &= [\mu(s) - \frac{Q_{in}}{V}]x, \\ \dot{V} &= Q_{in} - Q_{out}. \end{cases}$$

Aquí $(s, x, Q_{in}, Q_{out}, V) \in \mathcal{D} = \mathbb{R}_{++}^2 \times [0, Q_{\max}] \times [0, Q_{\max}] \times [0, V_{\max}]$.

Utilidades de los Distintos Modos

- Mono Continuo o Quimiostato ($Q_{in} = Q_{out}$ y $V = \text{constante}$):
 - + Trata lo que esta llegando en el tiempo t (no se necesita “almacenamiento”).
 - Proceso es menos eficiente pues hay menos control sobre la concentración del nutriente.
 - Riesgo de contaminación del proceso.
- Mono Semi-continuo o fed-batch ($Q_{in} \neq 0$, $Q_{out} = 0$ y V varía):
 - + Se puede adaptar el proceso a las necesidades del microorganismo.
 - + Proceso es más eficiente.
 - Requiere “almacenamiento”.
 - Riesgo de contaminación del proceso.
- Mono Discontinuo o batch ($Q_{in} = 0$, $Q_{out} = 0$ y V constante):
 - + Proceso es más eficiente.
 - + No hay riesgo de contaminación del proceso.
 - Requiere “almacenamiento”.

Utilidades de los Distintos Modos

- Mono Continuo o Quimiostato ($Q_{in} = Q_{out}$ y $V = \text{constante}$):
 - + Trata lo que esta llegando en el tiempo t (no se necesita “almacenamiento”).
 - Proceso es menos eficiente pues hay menos control sobre la concentración del nutriente.
 - Riesgo de contaminación del proceso.
- Mono Semi-continuo o fed-batch ($Q_{in} \neq 0$, $Q_{out} = 0$ y V varía):
 - + Se puede adaptar el proceso a las necesidades del microorganismo.
 - + Proceso es más eficiente.
 - Requiere “almacenamiento”.
 - Riesgo de contaminación del proceso.
- Mono Discontinuo o batch ($Q_{in} = 0$, $Q_{out} = 0$ y V constante):
 - + Proceso es más eficiente.
 - + No hay riesgo de contaminación del proceso.
 - Requiere “almacenamiento”.

Utilidades de los Distintos Modos

- Mono Continuo o Quimiostato ($Q_{in} = Q_{out}$ y $V = \text{constante}$):
 - + Trata lo que esta llegando en el tiempo t (no se necesita “almacenamiento”).
 - Proceso es menos eficiente pues hay menos control sobre la concentración del nutriente.
 - Riesgo de contaminación del proceso.
- Mono Semi-continuo o fed-batch ($Q_{in} \neq 0$, $Q_{out} = 0$ y V varía):
 - + Se puede adaptar el proceso a las necesidades del microorganismo.
 - + Proceso es más eficiente.
 - Requiere “almacenamiento”.
 - Riesgo de contaminación del proceso.
- Mono Discontinuo o batch ($Q_{in} = 0$, $Q_{out} = 0$ y V constante):
 - + Proceso es más eficiente.
 - + No hay riesgo de contaminación del proceso.
 - Requiere “almacenamiento”.

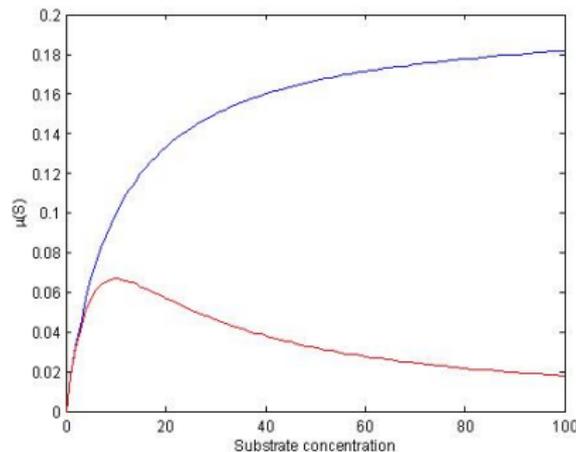
Distintas Funciones para la Tasa de Crecimiento

- Consideramos funciones de crecimiento del tipo Monod (1942):

$$\mu(s) = \frac{ms}{a+s}.$$

- y del tipo Haldane (1968):

$$\mu(s) = \frac{ms}{s^2/a_1 + s + a_2}.$$



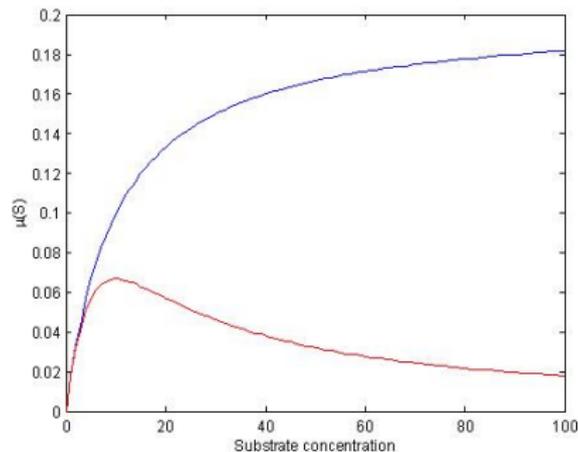
Distintas Funciones para la Tasa de Crecimiento

- Consideramos funciones de crecimiento del tipo Monod (1942):

$$\mu(s) = \frac{ms}{a+s}.$$

- y del tipo Haldane (1968):

$$\mu(s) = \frac{ms}{s^2/a_1 + s + a_2}.$$



Bioreactores Semicontinuos

- Los bioreactores semicontinuos o secuenciales por lote (SBR en inglés) son usualmente utilizados en industrias biotecnológicas, principalmente en el tratamiento de aguas.
- Típicamente, un tanque es llenado con un *lodo activo* o micro-organismos capaces de degradar algún sustrato no deseado.
- El método consiste en secuencias de ciclos compuestos de tres fases:
 - Fase 1: llenar el bioreactor con el agua contaminada,
 - Fase 2: esperar que la concentración del sustrato decrezca hasta un nivel de concentración considerado bajo,
 - Fase 3: vaciar el agua "limpia" del bioreactor, dejando el lodo activo dentro.
- El tiempo necesario para realizar estos ciclos puede ser largo y tiene un impacto económico en el proceso total
- Manipular el flujo de entrada durante la fase de llenado tiene una clara influencia en la duración del proceso total (más precisamente en la duración de las fases 1 y 2 pues la fase 3 tiene un tiempo fijo)

Bioreactores Semicontinuos

- Los bioreactores semicontinuos o secuenciales por lote (SBR en inglés) son usualmente utilizados en industrias biotecnológicas, principalmente en el tratamiento de aguas.
- Típicamente, un tanque es llenado con un *lodo activo* o micro-organismos capaces de degradar algún sustrato no deseado.
- El método consiste en secuencias de ciclos compuestos de tres fases:
 - Fase 1: llenar el bioreactor con el agua contaminada,
 - Fase 2: esperar que la concentración del sustrato decrezca hasta un nivel de concentración considerado bajo,
 - Fase 3: vaciar el agua "limpia" del bioreactor, dejando el lodo activo dentro.
- El tiempo necesario para realizar estos ciclos puede ser largo y tiene un impacto económico en el proceso total
- Manipular el flujo de entrada durante la fase de llenado tiene una clara influencia en la duración del proceso total (más precisamente en la duración de las fases 1 y 2 pues la fase 3 tiene un tiempo fijo)

Bioreactores Semicontinuos

- Los bioreactores semicontinuos o secuenciales por lote (SBR en inglés) son usualmente utilizados en industrias biotecnológicas, principalmente en el tratamiento de aguas.
- Típicamente, un tanque es llenado con un *lodo activo* o micro-organismos capaces de degradar algún sustrato no deseado.
- El método consiste en secuencias de ciclos compuestos de tres fases:
 - Fase 1: llenar el bioreactor con el agua contaminada,
 - Fase 2: esperar que la concentración del sustrato decrezca hasta un nivel de concentración considerado bajo,
 - Fase 3: vaciar el agua "limpia" del bioreactor, dejando el lodo activo dentro.
- El tiempo necesario para realizar estos ciclos puede ser largo y tiene un impacto económico en el proceso total
- Manipular el flujo de entrada durante la fase de llenado tiene una clara influencia en la duración del proceso total (más precisamente en la duración de las fases 1 y 2 pues la fase 3 tiene un tiempo fijo)

Bioreactores Semicontinuos

- Los bioreactores semicontinuos o secuenciales por lote (SBR en inglés) son usualmente utilizados en industrias biotecnológicas, principalmente en el tratamiento de aguas.
- Típicamente, un tanque es llenado con un *lodo activo* o micro-organismos capaces de degradar algún sustrato no deseado.
- El método consiste en secuencias de ciclos compuestos de tres fases:
 - Fase 1: llenar el bioreactor con el agua contaminada,
 - Fase 2: esperar que la concentración del sustrato decrezca hasta un nivel de concentración considerado bajo,
 - Fase 3: vaciar el agua "limpia" del bioreactor, dejando el lodo activo dentro.
- El tiempo necesario para realizar estos ciclos puede ser largo y tiene un impacto económico en el proceso total
- Manipular el flujo de entrada durante la fase de llenado tiene una clara influencia en la duración del proceso total (más precisamente en la duración de las fases 1 y 2 pues la fase 3 tiene un tiempo fijo)

Bioreactores Semicontinuos

- Los bioreactores semicontinuos o secuenciales por lote (SBR en inglés) son usualmente utilizados en industrias biotecnológicas, principalmente en el tratamiento de aguas.
- Típicamente, un tanque es llenado con un *lodo activo* o micro-organismos capaces de degradar algún sustrato no deseado.
- El método consiste en secuencias de ciclos compuestos de tres fases:
 - Fase 1: llenar el bioreactor con el agua contaminada,
 - Fase 2: esperar que la concentración del sustrato decrezca hasta un nivel de concentración considerado bajo,
 - Fase 3: vaciar el agua “limpia” del bioreactor, dejando el lodo activo dentro.
- El tiempo necesario para realizar estos ciclos puede ser largo y tiene un impacto económico en el proceso total
- Manipular el flujo de entrada durante la fase de llenado tiene una clara influencia en la duración del proceso total (más precisamente en la duración de las fases 1 y 2 pues la fase 3 tiene un tiempo fijo)

Bioreactores Semicontinuos

- Los bioreactores semicontinuos o secuenciales por lote (SBR en inglés) son usualmente utilizados en industrias biotecnológicas, principalmente en el tratamiento de aguas.
- Típicamente, un tanque es llenado con un *lodo activo* o micro-organismos capaces de degradar algún sustrato no deseado.
- El método consiste en secuencias de ciclos compuestos de tres fases:
 - Fase 1: llenar el bioreactor con el agua contaminada,
 - Fase 2: esperar que la concentración del sustrato decrezca hasta un nivel de concentración considerado bajo,
 - Fase 3: vaciar el agua “limpia” del bioreactor, dejando el lodo activo dentro.
- El tiempo necesario para realizar estos ciclos puede ser largo y tiene un impacto económico en el proceso total
- Manipular el flujo de entrada durante la fase de llenado tiene una clara influencia en la duración del proceso total (más precisamente en la duración de las fases 1 y 2 pues la fase 3 tiene un tiempo fijo)

Bioreactores Semicontinuos

- Los bioreactores semicontinuos o secuenciales por lote (SBR en inglés) son usualmente utilizados en industrias biotecnológicas, principalmente en el tratamiento de aguas.
- Típicamente, un tanque es llenado con un *lodo activo* o micro-organismos capaces de degradar algún sustrato no deseado.
- El método consiste en secuencias de ciclos compuestos de tres fases:
 - Fase 1: llenar el bioreactor con el agua contaminada,
 - Fase 2: esperar que la concentración del sustrato decrezca hasta un nivel de concentración considerado bajo,
 - Fase 3: vaciar el agua “limpia” del bioreactor, dejando el lodo activo dentro.
- El tiempo necesario para realizar estos ciclos puede ser largo y tiene un impacto económico en el proceso total
- Manipular el flujo de entrada durante la fase de llenado tiene una clara influencia en la duración del proceso total (más precisamente en la duración de las fases 1 y 2 pues la fase 3 tiene un tiempo fijo)

Bioreactores Semicontinuos

- Los bioreactores semicontinuos o secuenciales por lote (SBR en inglés) son usualmente utilizados en industrias biotecnológicas, principalmente en el tratamiento de aguas.
- Típicamente, un tanque es llenado con un *lodo activo* o micro-organismos capaces de degradar algún sustrato no deseado.
- El método consiste en secuencias de ciclos compuestos de tres fases:
 - Fase 1: llenar el bioreactor con el agua contaminada,
 - Fase 2: esperar que la concentración del sustrato decrezca hasta un nivel de concentración considerado bajo,
 - Fase 3: vaciar el agua “limpia” del bioreactor, dejando el lodo activo dentro.
- El tiempo necesario para realizar estos ciclos puede ser largo y tiene un impacto económico en el proceso total
- Manipular el flujo de entrada durante la fase de llenado tiene una clara influencia en la duración del proceso total (más precisamente en la duración de las fases 1 y 2 pues la fase 3 tiene un tiempo fijo)

Ecuaciones para un Bioreactor con n especies

Modelo Bioreactor Semicontinuo (SBR)

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \mu_i(\mathbf{s})x_i - \frac{F}{V}x_i, & x_i(t_0) = y_i \quad (i = 1 \cdots n) \\ \dot{s} = - \sum_{j=1}^n \mu_j(\mathbf{s})x_j + \frac{F}{V}(s_{in} - s), & s(t_0) = z \\ \dot{v} = F, & v(t_0) = w \end{cases}$$

donde

- x_i : concentración de la especie i en el tanque
- s : concentración del sustrato en el tanque
- v : volumen de agua presente en el tanque
- $\mu_i(\cdot)$: función de crecimiento de la especie i
- F : variable de control no negativa
- s_{in} : concentración constante en la entrada
- $\xi = (y_1, \dots, y_n, z, w) \in \mathcal{R}_+^n \times]0, s_{in}[\times]0, v_{\max}[$: condiciones iniciales
- $\mathcal{T} = \mathcal{R}_+^n \times]0, s_{out}[\times \{v_{\max}\}$: conjunto objetivo para las variables de estado

Problema de Tiempo Mínimo

Problema de Control Óptimo

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \mu_i(s)x_i - \frac{F}{v}x_i, & x_i(t_0) = y_i \quad (i = 1 \dots n) \\ \dot{s} = -\sum_{j=1}^n \mu_j(s)x_j + \frac{F}{v}(s_{in} - s), & s(t_0) = z \\ \dot{v} = F, & v(t_0) = w \end{cases}$$

Dada cualquier condición inicial $\xi = (y_1, \dots, y_n, z, w)$, el objetivo es alcanzar el conjunto \mathcal{T} en un tiempo mínimo, es decir

$$V(\xi) = \inf_{F(\cdot)} \left\{ t - t_0 \mid s^{\xi, F}(t) \leq s_{out}, v^{\xi, F}(t) = v_{max} \right\}, \quad (1)$$

donde $s^{\xi, F}(\cdot)$, $v^{\xi, F}(\cdot)$ denotan soluciones del sistema anterior con condiciones iniciales ξ y control $F(\cdot)$

Problema de Tiempo Mínimo

Problema de Control Óptimo

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \mu_i(s)x_i - \frac{F}{v}x_i, & x_i(t_0) = y_i \quad (i = 1 \dots n) \\ \dot{s} = -\sum_{j=1}^n \mu_j(s)x_j + \frac{F}{v}(s_{in} - s), & s(t_0) = z \\ \dot{v} = F, & v(t_0) = w \end{cases}$$

Dada cualquier condición inicial $\xi = (y_1, \dots, y_n, z, w)$, el objetivo es alcanzar el conjunto \mathcal{T} en un tiempo mínimo, es decir

$$V(\xi) = \inf_{F(\cdot)} \left\{ t - t_0 \mid s^{\xi, F}(t) \leq s_{out}, v^{\xi, F}(t) = v_{max} \right\}, \quad (1)$$

donde $s^{\xi, F}(\cdot)$, $v^{\xi, F}(\cdot)$ denotan soluciones del sistema anterior con condiciones iniciales ξ y control $F(\cdot)$

El caso de una especie

Sistema con $n = 1$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \mu(s)x - \frac{F}{v}x \\ \frac{ds}{d\tau} = -\mu(s)x + \frac{F}{v}(s_{in} - s) \\ \frac{dv}{d\tau} = F. \end{cases}$$

• μ creciente \Rightarrow

• μ creciente-decreciente \Rightarrow

El caso de una especie

Sistema con $n = 1$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \mu(s)x - \frac{F}{V}x \\ \frac{ds}{d\tau} = -\mu(s)x + \frac{F}{V}(s_{in} - s) \\ \frac{dV}{d\tau} = F. \end{cases}$$

- μ creciente \Rightarrow

- (1) Llenar el bioreactor
- (2) esperar

- μ creciente-decreciente \Rightarrow

- (1) Llegar al nivel máximo (llenando o esperando)
- (2) mantenerse en este nivel hasta que el bioreactor este lleno
- (3) esperar

El caso de una especie

Sistema con $n = 1$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \mu(s)x - \frac{F}{V}x \\ \frac{ds}{d\tau} = -\mu(s)x + \frac{F}{V}(s_{in} - s) \\ \frac{dV}{d\tau} = F. \end{cases}$$

- μ creciente \Rightarrow

- (1) Llenar el bioreactor
- (2) esperar

- μ creciente-decreciente \Rightarrow

- (1) Llegar al nivel máximo (llenando o esperando)
- (2) mantenerse en este nivel hasta que el bioreactor este lleno
- (3) esperar

El caso de una especie

Sistema con $n = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\tau} = \mu(s)x - \frac{F}{V}x \\ \frac{ds}{d\tau} = -\mu(s)x + \frac{F}{V}(s_{in} - s) \\ \frac{dV}{d\tau} = F. \end{array} \right.$$

- μ creciente \Rightarrow

- (1) Llenar el bioreactor
- (2) esperar

- μ creciente-decreciente \Rightarrow

- (1) Llegar al nivel máximo (llenando o esperando)
- (2) mantenerse en este nivel hasta que el bioreactor este lleno
- (3) esperar

El caso de una especie

Sistema con $n = 1$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \mu(s)x - \frac{F}{V}x \\ \frac{ds}{d\tau} = -\mu(s)x + \frac{F}{V}(s_{in} - s) \\ \frac{dV}{d\tau} = F. \end{cases}$$

- μ creciente \Rightarrow
 - (1) Llenar el bioreactor
 - (2) esperar
- μ creciente-decreciente \Rightarrow
 - (1) Llegar al nivel máximo (llenando o esperando)
 - (2) mantenerse en este nivel hasta que el bioreactor este lleno
 - (3) esperar

El caso de una especie

Sistema con $n = 1$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \mu(s)x - \frac{F}{V}x \\ \frac{ds}{d\tau} = -\mu(s)x + \frac{F}{V}(s_{in} - s) \\ \frac{dV}{d\tau} = F. \end{cases}$$

- μ creciente \Rightarrow
 - (1) Llenar el bioreactor
 - (2) esperar
- μ creciente-decreciente \Rightarrow
 - (1) Llegar al nivel máximo (llenando o esperando)
 - (2) mantenerse en este nivel hasta que el bioreactor este lleno
 - (3) esperar

El caso de una especie

Sistema con $n = 1$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \mu(s)x - \frac{F}{V}x \\ \frac{ds}{d\tau} = -\mu(s)x + \frac{F}{V}(s_{in} - s) \\ \frac{dV}{d\tau} = F. \end{cases}$$

- μ creciente \Rightarrow
 - (1) Llenar el bioreactor
 - (2) esperar
- μ creciente-decreciente \Rightarrow
 - (1) Llegar al nivel máximo (llenando o esperando)
 - (2) mantenerse en este nivel hasta que el bioreactor este lleno
 - (3) esperar

El caso de una especie

Sistema con $n = 1$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \mu(s)x - \frac{F}{V}x \\ \frac{ds}{d\tau} = -\mu(s)x + \frac{F}{V}(s_{in} - s) \\ \frac{dV}{d\tau} = F. \end{cases}$$

- μ creciente \Rightarrow
 - (1) Llenar el bioreactor
 - (2) esperar
- μ creciente-decreciente \Rightarrow
 - (1) Llegar al nivel máximo (llenando o esperando)
 - (2) mantenerse en este nivel hasta que el bioreactor este lleno
 - (3) esperar

Bibliografía



J. MONOD.

La technique de culture continue. Théorie et applications.

Ann. Inst. Pasteur Paris 79, pp. 390–410, 1950.



A. NOVICK AND L. SZILARD.

Description of the chemostat.

Science 112, pp. 715–716, 1950.



J. MORENO

Optimal control of bioreactors for the wastewater treatment.

Optimal Control, Applications and Methods, 20, pp. 145–164, 1999.



H.L. SMITH AND P. WALTMAN.

The Theory of the Chemostat.

Cambridge University Press, 1995.



P. GAJARDO, H. RAMÍREZ C., A. RAPAPORT

Minimum time impulse control of SBR with one or more species.

SIAM Journal on Control & Optimization, 2008