

Tarea optativa MA54G

Noviembre de 2009

Prof.: Joaquín Fontbona

Caracterización de Lévy del movimiento Browniano

Def.: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad filtrado satisfaciendo las condiciones habituales. Decimos que un proceso $B = (B_t, t \geq 0)$ a valores en $\mathbb{R}$ es un $\mathcal{F}_t$ -movimiento Browniano si

- i) B es adaptado y continuo, con $B_0 = 0$,
- ii) B tiene incrementos estacionarios, con $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, y
- iii) Para todo $t, s \geq 0$
 $B_{t+s} - B_t$ es independiente de $\mathcal{F}_t$.

Un proceso $B = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})_{t \geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t$ -movimiento Browniano d -dimensional si para cada i , $B^{(i)}$ es un $\mathcal{F}_t$ -movimiento Browniano, y $(B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$ son procesos independientes.

- a) (0.5) Muestre que un $\mathcal{F}_t$ -movimiento Browniano es un movimiento Browniano (en el sentido habitual). Muestre también que si W_t es un movimiento Browniano y $\mathcal{F}_t$ su filtración natural, entonces W_t es un $\mathcal{F}_t$ -movimiento Browniano.

El objetivo de este problema es probar el siguiente resultado:

Teorema (Lévy).

Sean $B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)}$, d martingalas locales continuas c/r a la filtración $\mathcal{F}_t$, todas ellas nulas en 0. Entonces $B = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})_{t \geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t$ -movimiento Browniano d -dimensional ssi

$$(*) \quad \langle B^{(i)}, B^{(j)} \rangle_t = \delta_{i,j} t$$

para todo $i, j = 1, \dots, d$.

En clases se vio que la condición $(*)$ es necesaria, se probará ahora que es suficiente.

- b) (1.0) Considere primero el caso $d = 1$. Muestre que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\exp\left\{i\lambda B_t + \frac{\lambda^2}{2}t\right\}$$

es una martingala local, acotada en cada intervalo $[0, T]$.

Deduzca que para todo $t, s \geq 0$,

$$\mathbb{E}(\exp\{i\lambda(B_{t+s} - B_t)\} | \mathcal{F}_t) = \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}s\right\}.$$

- c) (1.5) Sea $A \in \mathcal{F}_t$ un conjunto de medida $\mathbb{P}$ no nula, y $\tilde{\mathbb{P}}_A$ la medida de probabilidad absolutamente continua c/r a $\mathbb{P}$ definida por

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}_A}{d\mathbb{P}} = \frac{\mathbf{1}_A}{\mathbb{E}(A)}.$$

Sea μ_A la ley en $\mathbb{R}$ de la v.a. $(B_{t+s} - B_t)$ bajo $\tilde{\mathbb{P}}_A$ (es decir, para todo Boreliano C de $\mathbb{R}$, $\mu_A(C) = \tilde{\mathbb{P}}_A(B_{t+s} - B_t \in C)$).

Calcule la función característica de μ_A y deduzca que para toda función medible acotada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(f(B_{t+s} - B_t)\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(f(B_s))\mathbb{P}(A).$$

Concluya el resultado deseado en el caso $d = 1$.

- d) (1.5) Se considera ahora el caso general $d \geq 1$ (por lo tanto, ahora $B_t = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})$). Sea $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$.

Pruebe que, con $u \cdot v$ denotando el producto punto en $\mathbb{R}^d$ y $\|v\|$ la norma euclídeana, se tiene que

$$\exp\{i\lambda \cdot B_t + \frac{\|\lambda\|^2}{2}t\}$$

es una martingala local, acotada en intervalos finitos. Deduzca que

$$\mathbb{E}(\exp\{i\lambda \cdot (B_{t+s} - B_t)\}|\mathcal{F}_t) = \exp\{-\frac{\|\lambda\|^2}{2}s\}.$$

- e) (1.0) Extendiendo a $\mathbb{R}^d$ el argumento de la parte c), pruebe que para todo $A \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{E}(f_1(B_{t+s}^{(1)} - B_t^{(1)}) \cdots f_d(B_{t+s}^{(d)} - B_t^{(d)})\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(f_1(B_s^{(1)}) \cdots f_d(B_s^{(d)}))\mathbb{P}(A).$$

Concluya el resultado.

- f) (0.5) Sean X, Y dos movimiento Brownianos reales independientes definidos en cierto espacio de probabilidad (completo), y θ_s un proceso progresivo c/r a la filtración completada generada por (X, Y) .

Pruebe que

$$B_t := \int_0^t \cos(\theta_s) dX_s + \int_0^t \sin(\theta_s) dY_s \quad \text{y}$$

$$B'_t := \int_0^t \sin(\theta_s) dX_s - \int_0^t \cos(\theta_s) dY_s$$

son dos movimiento Brownianos independientes. Qué interpretación geométrica puede dar a esto?