CLASE AUXILIAR 7: CÁLCULO DE ITÔ

1. Sea $(M_t)_{t\geq 0}$ una martingala local y λ un complejo. Pruebe que $N_t = \exp\{\lambda M_t - \frac{1}{2}\lambda^2 \langle M\rangle_t\}$ es una martingala local.
2. Considere $(X_t)_{t\geq 0}$, $(Y_t)_{t\geq 0}$ procesos cumpliendo $\forall\, t \geq 0$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds \tag{1}$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s)dB_s + \int_0^t b(Y_s)ds \tag{2}$$

   Donde $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones Lipschitz, $X_0 = Y_0$ y B es un movimiento browniano estándar. Probar que:

$$\forall\, t : X_t = Y_t \ \ c.s.$$

3. Sea $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano bidimensional tal que $Z_0 = Z \neq (0,0)$.
   Definimos para $\varepsilon < |Z| < R$:

$$\begin{aligned} T_\varepsilon &= \inf\{t \geq 0 : |Z_t| < \varepsilon\} \\ S_R &= \inf\{t \geq 0 : |Z_t| > R\} \end{aligned}$$

   a. Encontrar una función no trivial $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ talque $f(|Z_{t\wedge T_\varepsilon}|^2)$ es martingala local.
   b. Deduzca que:
      i. $\mathbb{P}_Z\left(\exists\, t \geq 0 : Z_t = 0\right) = 0$
      ii. $\mathbb{P}_Z\left(T_\varepsilon < \infty\right) = 1$
4. Considere $L^2 = L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), dx)$ y considere el siguiente espacio $\mathcal{H}$ de las funciones de la forma $f = \sum_i a_i \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}$. Note que $\mathcal{H}$ es denso en L^2 para la norma estándar.
   Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un m.b. estándar definido en $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ y considere el siguiente operador:

$$\begin{aligned} I_e : \mathcal{H} &\to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) =: \mathbf{L}^2 \\ f = \sum_i a_i \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]} &\to I_e(f) = \sum_i a_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \end{aligned}$$

   a. Pruebe que $I_e(f)$ es una v.a. normal. Calcule su esperanza y varianza.
   b. Pruebe que I_e se puede extender a L^2. Llamemos I a esta extensión.
   c. Pruebe que si $(X_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de variables con media nula que converge a X en $\mathbf{L}^2$ entonces X es una v.a. normal con media nula. Concluya que si $f \in L^2$ entonces $I(f)$ es una v.a. normal con media nula y varianza:

$$\int_0^{+\infty} f^2(u)du$$

   d. Para $f \in L^2$defina:

$$Z_t = \int_0^t f(s)dX_s = \int f(s)\mathbf{1}_{(0,t]}(s)ds$$

   Pruebe que Z_t es un proceso adaptado a $\mathcal{F}_t$ y que $Z_t - Z_s$ es independiente a $\mathcal{F}_s$
   e. Pruebe que Z_t, $Z_t^2 - \int_0^t f^2(s)ds$, $\exp\left(Z_t - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds\right)$ son martingalas.
5. **El proceso de Ornstein - Ulhenbeck**. El proceso de OU es la única solución de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} dX_t &= -cX_t dt + \sigma dB_t \\ X_0 &= x \end{aligned}$$

   Encuentre una expresión explícita del proceso OU y calcule su esperanza y varianza.