Tarea 2 MA54G

Prof.: Joaquín Fontbona T.
Auxs.: Julio Backhoff V - Héctor Olivero Q.

Problema I
Construcción de Lévy del moviemento Browniano
Para cada $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, sea $f_{n,k}$ la función definida para $t \in [0,1]$ por

$$f_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{n/2}(t - k2^{-n}) & \text{si } x \in (k2^{-n}, (2k+1)2^{-(n+1)}), \\ 2^{-\frac{n+2}{2}} - 2^{n/2}(t - (2k+1)2^{-(n+1)}) & \text{si } x \in ((2k+1)2^{-(n+1)}, (k+1)2^{-n}) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(ver dibujo). Sean $(N_{j,i}, i \in \mathbb{N}, j = 0, \ldots, 2^i - 1)$ v.a. i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ y N otra v.a. de misma ley e independiente de las anteriores, todas definidas en un espacio de probabilidad dado, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definimos para $n \geq 0$,

$$B_t^{(n)} := Nt + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{2^i - 1} N_{j,i} f_{i,j}(t) \right) \quad \text{y } B_t^{(-1)} = Nt.$$

El objetivo de este problema es probar el siguiente resultado:
Teorema Con probabilidad 1, cuando $n \to \infty$ la sucesión de funciones aleatorias $B^{(n)}(\omega)$ converge uniformente en $[0,1]$ a una función continua, que denotamos

$$\begin{aligned} B(\omega) : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto B_t(\omega), \end{aligned}$$

y el proceso $(B_t, t \in [0,1])$ es un movimiento Browniano.

i) (1pt) Pruebe que para $n \geq 0$, $\mathbb{P}(\|B^{(n)} - B^{(n-1)}\|_u > \frac{1}{n^2}) \leq 2^n \mathbb{P}(N > \frac{1}{n^2} 2^{(n+2)/2}) \leq 2^n \exp(-\frac{2^{n+2}}{2n^4})$, donde $\| \cdot \|_u$ denota la norma uniforme.

ii) (1pt) Deduzca que, para $\mathbb{P}-$casi todo $\omega \in \Omega$, $\exists n_0(\omega)$ t.q. $\forall n \geq n_0(\omega)$, $\|B^{(n)}(\omega) - B^{(n-1)}(\omega)\|_u < \frac{1}{n^2}$ y que, por lo tanto, casi seguramente, $(B^{(n)})$ es una sucesión de Cauchy en $C([0,1], \mathbb{R})$.

iii) (0.5pt) Se probará por inducción en $n \geq -1$ que las v.a.

$$B^{(n)}_{2^{-n-1}}, B^{(n)}_{2 \cdot 2^{-n-1}} - B^{(n)}_{2^{-n-1}}, \cdots, B^{(n)}_{k \cdot 2^{-n-1}} - B^{(n)}_{(k-1)2^{-n-1}}, \cdots, B^{(n)}_1 - B^{(n)}_{(2^{n+1}-1)2^{-n-1}}$$

son independientes entre sí y de ley $\mathcal{N}(0, 2^{-n-1})$.

Note que el caso $n = -1$ es trivial, y que en el caso $n = 0$ lo que se quiere probar es que las v.a. $B^{(-1)}_{\frac{1}{2}} + N_{00}2^{-1} = \frac{1}{2}(N + N_{00})$ y $B^{(-1)}_1 - (B^{(-1)}_{\frac{1}{2}} + N_{00}2^{-1}) = \frac{1}{2}(N - N_{00})$ son $\mathcal{N}(0, 2^{-1})$ independientes.

iv) (1.5pt) Para el paso inductivo $n \to n+1$, explicite como se obtienen a partir de $B^{(n)}_{(k+1) \cdot 2^{-n-1}} - B^{(n)}_{k2^{-n-1}}$ los dos incrementos

$$B^{(n+1)}_{(2k+1) \cdot 2^{-n-2}} - B^{(n+1)}_{(2k)2^{-n-2}} \text{ y } B^{(n+1)}_{2(k+1) \cdot 2^{-n-2}} - B^{(n+1)}_{(2k+1)2^{-n-2}},$$

y deduzca que estos son independientes de ley $\mathcal{N}(0, 2^{-n-2})$, e independientes de los demás incrementos.

v) (2.0) Sea B el límite de la sucesión $B^{(n)}$. Porqué es un proceso y porqué es continuo? Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ los incrementos

$$B_{2^{-n-1}}, B_{2\cdot 2^{-n-1}} - B_{2^{-n-1}}, \cdots, B_{k\cdot 2^{-n-1}} - B_{(k-1)2^{-n-1}}, \cdots, B_1 - B_{(2^{n+1}-1)2^{-n-1}}$$

son independientes entre sí y de ley $\mathcal{N}(0, 2^{-n-1})$. Deduzca que, con $\mathbb{D}$ denotando el conjunto de números diádicos, $(B_t, t \in [0,1] \cap \mathbb{D})$ es un proceso incrementos estacionarios independientes, con $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ para todo $t, s \in [0,1] \cap \mathbb{D}$ con $s \leq t$. Concluya el resultado.