

**TAREA OPCIONAL 1:
APLICACIONES A FINANZAS.**

1. EL MODELO DE COX-ROSS-RUBINSTEIN PARA OPCIONES AMERICANAS

Utilizando la notación y el contexto de la clase auxiliar 2 desarrolle lo siguiente:

1. Muestre que P_n el precio en el tiempo n de una opción americana de venta (*put*) en una acción con madurez N y *strike* K se puede escribir como $P_n = P_{am}(s, S_n)$, donde:

$$P_{am}(n, x) = \begin{cases} \max\left((K - x)_+, \frac{f(n+1, x)}{1+r}\right) & n \leq N - 1 \\ (K - x)_+ & n = N \end{cases}$$

Y $f(n + 1, x) = pP_{am}(n + 1, x(1 + a)) + (1 - p)P_{am}(n + 1, x(1 + b))$ y $p = (b - r)/(b - a)$.

2. Muestre que la función $P_{am}(0, x)$ puede escribirse como:

$$P_{am}(0, x) = \sup_{\nu \in \mathcal{I}_{0, N}} \mathbb{E}^* \left((1 + r)^{-\nu} (K - xV_\nu)_+ \right)$$

Donde la secuencia de variables aleatorias $(V_n)_{0 \leq n \leq N}$ es definida por: $V_0 = 1$ y para $n \geq 1$, $V_n = \prod_{i=1}^n U_i$, donde las U_i 's son variables aleatorias a determinar.

3. De la representación encontrada en la parte anterior, muestre que $x \rightarrow P_{am}(0, x)$ es convexa y no creciente.
4. Asumamos que $a < 0$. Muestre que existe un real $x^* \in [0, K]$ tal que para $x \leq x^*$, $P_{am}(0, x) = (K - x)_+$ y para $x \in]x^*, K/(1 + a)^N[$, $P_{am}(0, x) > (K - x)_+$.
5. Un agente es dueño de una *put* americana en el tiempo 0. ¿Para qué valores del *spot* S_0 el agente ejercerá su opción inmediatamente?
6. Muestre que la estrategia replicante de una *put* americana está determinada por una cantidad $H_n = \Delta(n, S_{n-1})$ del activo riesgoso que se debe mantener en el portafolio replicante en el tiempo n , donde Δ puede ser escrito como función de P_{am} .

2. EJEMPLO NUMÉRICO

En este ejemplo implementaremos el método de valoración via árboles binomiales para un mercado en el que existe sólo un activo riesgoso y un activo sin riesgo. Para desarrollar el trabajo de esta parte deberá primero obtener datos sobre el precio de una acción desde el sitio:

<http://espanol.finance.yahoo.com/>

Una vez que esté en el sitio de Yahoo Finanzas haga lo siguiente:

1. Haga click en "Acciones más activas". (A la izquierda de su pantalla).
2. Escoja una acción y cuando se hayan cargado los datos de la acción seleccionada haga click sobre "Precios Históricos". (Nuevamente a la izquierda de su pantalla).
3. Ingrese datos de inicio y fin de periodo a modo de tener datos semanales para dos años de historia. Genere los datos haciendo click en "Obtené Precios" y luego descárgelos a una planilla haciendo click en "Descargar a Hoja de Cálculo"(Abajo).

Para obtener la tasa libre de riesgo visite el portal:

<http://www.bloomberg.com/markets/rates/index.html>

Y utilice el dato *current yield* para el bono a 30 años. A esta tasa la llamaremos r .

Ahora que ya tiene los datos puede trabajar con ellos en Excel o el programa que más le acomode.

A partir de los datos que obtuvo calcule los retornos logarítmicos semanales, es decir genere la serie: $\ln(S_{t+1}/S_t)$. Una vez que haya generado esta serie calcule su desviación estándar muestral que en adelante denotaremos por σ . Suponga que el último precio que obtuvo es el precio actual de la acción (S_0). Genere un árbol de trayectorias utilizando los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}1 + a &= \exp(-\sigma) \\1 + b &= \exp(\sigma) \\R &= \exp(r/52) \\p &= \frac{R - (1 + a)}{b - a}\end{aligned}$$

A partir del árbol de precios que generó y utilizando la técnica de valoración neutra al riesgo calcule el valor de una opción de venta americana con madurez igual a 24 semanas y *strike* igual a $0,9 \times S_0$. Al precio de esta opción lo llamaremos P

Suponga que usted es el comprador de la *put* descrita antes y que como no está muy convencido de comprar el vendedor le ofrece lo siguiente: por $0,1 \times P$ usted tendrá derecho a comprar en 12 semanas más una *put* americana que vence en la misma fecha que la *put* original al precio P . ¿Le conviene esta nueva oferta?

3. REFERENCIAS

- “*Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*” Damien Lamberton & Bernard Lapeyre.
- “*Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones.*” John Hull.
- Ejemplo en Excel disponible en material docente.