Cálculo Estocástico

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliares: Héctor Olivero y Julio Backhoff

1. Sea $\tau_a = \text{ínf}\{t \geq 0 : B_t > a\}$, para $a \geq 0$.
   a) Verificar que, para casi todo ω, las funciones $a \longmapsto \tau_a(\omega)$ son crecientes y continuas a la derecha (y luego càdlàg).
   b) Mostrar que $\forall a, b \geq 0$, $\tau_{a+b} - \tau_a$ y τ_b son independientes e iguales en ley. Deducir que el proceso $(\tau_a, a \geq 0)$ posee incrementos estacionarios independientes.
   c) Probar que $\tau_a = a^2 \tau_1 = \frac{a^2}{B_1^2}$ en ley, y de esto deducir que la densidad de τ_a es

$$f(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right)$$

2. Sea B un movimiento browniano.
   Mostrar que $\mathbb{P}\left(B_u \neq 0, \forall u \in (s,t)\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sqrt{\frac{s}{t}}\right)$

3. Sea B un movimiento browniano y $\tau_a = \text{ínf}\{t \geq 0 : B_t = a\}$ para $a > 0$ y $U = \text{ínf}\{t \geq \tau_1 : B_t = 0\}$. Asuma que ambos son tiempos de parada para la filtración usual.
   a) Argumente intuitivamente que $U = \tau_2$ en ley. Pruebe además que $U - \tau_1$ y τ_1 son v.a. independientes y de igual ley.
   b) Pruebe ahora rigurosamente que $U = \tau_2$ en ley. Para esto pruebe y use el hecho que $U = A + D$ y $\tau_2 = A' + D'$ con A y D independientes y $(A, D) = (A', D')$ en ley.