Cálculo Estocástico

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliares: Héctor Olivero y Julio Backhoff

TAREA 1

1. Caracterización Equivalente de Integrabilidad Uniforme
   Sea (Ω, μ) un espacio de medida finita.
   Pruebe que $\mathcal{C} \subset L^1(\Omega)$ es uniformemente integrable si y solo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

   a) $\sup_{f \in \mathcal{C}} ||f||_{L^1} < \infty$

   b) $\lim_{\mu(A) \to 0} \left[\sup_{f \in \mathcal{C}} \int_A |f| d\mu \right] = 0$

2. Teorema de Convergencia de Vitali en Espacios de Probabilidad

   Recordar que se dice que una sucesión de variables aleatorias $(Z_n)_n$ converge a Z en probabilidad, si $\forall \epsilon > 0$, $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|Z_n - Z| > \epsilon) = 0$. Demuestre la siguiente proposición:

   Proposición 1:
   Sea $(Z_n)_n$ variables aleatorias. Son equivalentes:

   a) Z_n es uniformemente integrable y converge en probabilidad a $Z \in L^1$

   b) Z_n converge en L^1 a $Z \in L^1$

3. Estudio de Martingalas Inversas

   Sean $(\mathcal{F}_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ filtración que cumple $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_0, \forall n \in -\mathbb{N}$. Denotaremos $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n \leq 0} \mathcal{F}_n$.

   Definición 1. Se dice que una sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n \leq 0}$ es martingala (respectivamente submartingala, sobremartingala) si:

   i) $X_n \in L^1$ y es F_n medible, para cada $n \leq 0$

   ii) $X_n = \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ (respectivamente $\leq, \geq$), para cada $n \leq 0$

   Definición 2. Decimos que τ es un tiempo de parada si toma valores en $-\mathbb{N}$ y para casa $n \leq 0$, $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

   En este problema usted deberá demostrar los siguientes lemas y teoremas, los que son análogos (pero más sencillos) a los de la teoría de martingalas habituales vistos en clase. Note que algunos de los resultados son más poderosos que antes.

   Lema 1:
   Sea $(X_n)_{n \leq 0}$ martingala y S, T dos tiempos de parada, con $S, T \geq K$ c.s. , donde $K \in -\mathbb{N}$. Entonces

   $$\mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_S) = X_S \text{ , en el conjunto } \{S \leq T\}$$

   Lema 2 (Maximal)**:**

   a) Sea $(X_n)_{n \leq 0}$ submartingala y $C > 0$. Entonces

   $$\mathbb{P}\left(\sup_{n \in -\mathbb{N}} X_n \geq C\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[(X_0)_+\right]}{C}$$

   b) Sea $(X_n)_{n \leq 0}$ martingala y $C > 0$. Entonces

   $$\mathbb{P}\left(\sup_{n \in -\mathbb{N}} |X_n| \geq C\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X_0|\right]}{C}$$

Teorema 1:
Sea $(X_n)_{n\leq 0}$ submartingala. Definir (como en clases) la variable aleatoria $\gamma_{a,b}(X)_{-\mathbb{N}}$. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\gamma_{a,b}(X)_{-\mathbb{N}}\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[(X_0 - b)_+\right]}{b-a}$$

Teorema 2:
Sea $(X_n)_{n\leq 0}$ submartingala. Entonces ella converge casi seguramente cuando $n \to -\infty$.

Teorema 3:
Sea $(X_n)_{n\leq 0}$ martingala. Entonces las siguientes tres propiedades son (siempre) ciertas:

a) Existe $X_{-\infty} \in L^1$ tal que X_n converge a $X_{-\infty}$ c.s. y en L^1.

b) $(X_n)_{n\leq 0}$ es uniformemente integrable.

c) Existe $X_{-\infty} \in L^1$ tal que $X_{-\infty} = \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_{-\infty}\right]$ y $(X_n)_{n\in(-\mathbb{N}\cup-\infty)}$ es martingala.

Teorema 4 (Martingalas Decrecientes)**:**
Sea $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$, $\eta \in L^1$. Entonces $\mathbb{E}\left(\eta|\mathcal{F}_n\right) \to \mathbb{E}\left(\eta|\mathcal{F}_{-\infty}\right)$ casi seguramente y en L^1.