

CLASE AUXILIAR 4:
COMPORTAMIENTO EN TIEMPO LARGO DE MARTINGALAS E INTRODUCCIÓN
AL PROBLEMA DE DETENCIÓN ÓPTIMA.

1. COMPORTAMIENTO EN TIEMPO LARGO DE MARTINGALAS

Problema 1:

Se dice que el proceso $(M_n)_{n \geq 0}$ posee incrementos independientes si $\forall n$ $M_{n+1} - M_n$ es independiente a $\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, \dots, M_n)$.

1. Sea $(M_n)_{n \geq 0}$ martingala con $\mathbb{E}(M_n^2) < \infty$, $\forall n$ e incrementos independientes. Sea:

$$\begin{aligned}\sigma_0^2 &= \text{Var}(M_0) \\ \sigma_n^2 &= \text{Var}(M_n - M_{n-1}) \quad \forall n \geq 1\end{aligned}$$

- a) Probar que $\text{Var}(M_n) = \sum_{k=0}^n \sigma_k^2$
 b) Denotemos por $(\langle M \rangle_n)_{n \geq 0}$ al compensador de $(M_n)_{n \geq 0}$. Calcule $\langle M \rangle_n$.
 2. Sea $(M_n)_{n \geq 0}$ martingala gaussiana, es decir: $\forall n$ $(M_0, \dots, M_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tiene distribución gaussiana.
 a) Probar que $(M_n)_{n \geq 0}$ posee incrementos independientes.
 b) Probar que $\forall \theta \in \mathbb{R}$ fijo, el proceso $Z_n^\theta = \exp(\theta M_n - \frac{\theta^2 \langle M \rangle_n}{2})$ es martingala. ¿Converge c.s.?

Problema 2:

Sea $(M_n)_{n \geq 0}$ martingala con $\mathbb{E}(M_n^2) < \infty$, $\forall n$. Denotemos por $(\langle M \rangle_n)_{n \geq 0}$ al compensador de $(M_n)_{n \geq 0}$ y anotemos $\langle M \rangle_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M \rangle_n$, que existe por que $\langle M \rangle_n$ es creciente.

1. Sea τ tiempo de parada. Probar que $(\langle M \rangle_{n \wedge \tau})_{n \geq 0}$ es el compensador de $(M_{n \wedge \tau})_{n \geq 0}$.
 2. Sea $a > 0$. Probar que $\tau_a = \inf\{n : \langle M \rangle_{n+1} > a\}$ es un tiempo de parada.
 3. Mostrar que $(M_n^{\tau_a})$ es una martingala que converge c.s. y en L^2 , donde $M_n^{\tau_a} = M_{n \wedge \tau_a}$.
 4. Probar que $(M_n)_{n \geq 0}$ converge c.s. en el evento $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$.

Problema 3:

Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ martingala, $p > 1$. Pruebe que $(X_n)_{n \geq 0}$ está acotada en L^p ssi converge en L^p .

2. EL PROBLEMA DE DETENCIÓN ÓPTIMA Y OPCIONES AMERICANAS

En la clase anterior vimos que:

2.1. Valorizando y Cubriendo activos contingentes en un mercado completo. .

Asumamos que el mercado es viable y completo. Denotemos por $\mathbb{P}^*$ la única medida de probabilidad bajo la cual los precios descontados de los activos son martingalas. Sea h una variable aleatoria no negativa $\mathcal{F}_N$ -medible y ϕ la estrategia admisible que replica el activo contingente definido por h , es decir:

$$V_N(\phi) = h$$

La secuencia $(\tilde{V}_n)_{0 \leq n \leq N}$ es una $\mathbb{P}^*$ -martingala, y consecuentemente:

$$V_0(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$$

Y más generalmente:

$$V_n(\phi) = S_n^0 \mathbb{E}^* \left(\frac{h}{S_N^0} | \mathcal{F}_n \right), \quad n = 0, 1, \dots, N$$

. En cualquier tiempo, el valor de la estrategia admisible que replica h está determinado completamente por h . Es sumamente natural llamar a $V_n(\phi)$ el precio de la opción, pues es la riqueza necesaria en tiempo n para replicar h en tiempo N siguiendo la estrategia ϕ . Si al tiempo 0 un inversor vende la opción por:

$$\mathbb{E}^* \left(\frac{h}{S_N^0} \right)$$

El puede seguir la estrategia replicante ϕ para generar la cantidad h en el tiempo N . En otras palabras está perfectamente cubierto.

2.2. Introducción a las opciones americanas. .

Definimos como opción americana a una secuencia adaptada y positiva $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$. Donde Z_n representa la ganancia inmediata que se obtiene al ejercer la opción en el instante n . Sea $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ el precio de la opción americana. Entonces es claro que:

$$\begin{cases} U_N &= Z_N \\ U_{n-1} &= \max\{Z_{n-1}, \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*(U_n | \mathcal{F}_{n-1})\} \quad \forall n \leq N \end{cases}$$

Definimos $\tilde{U}_n = U_n / S_n^0$ y $\tilde{Z}_n = Z_n / S_n^0$

Proposición 1:

El proceso $(\tilde{U}_n)_{0 \leq n \leq N}$ es una $\mathbb{P}^*$ -sobremartingala y es la menor de las $\mathbb{P}^*$ -sobremartingalas que dominan a $(\tilde{Z}_n)_{0 \leq n \leq N}$.

2.3. La envoltura de Snell. .

Sea $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ un proceso adaptado y definamos $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ como sigue:

$$\begin{cases} U_N &= Z_N \\ U_n &= \max\{Z_n, \mathbb{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)\} \quad \forall n \leq N-1 \end{cases}$$

Proposición 2:

La variable aleatoria definida por:

$$\nu_0 = \inf\{n \geq 0 | U_n = Z_n\}$$

Es un tiempo de parada y $(U_n^{\nu_0})_{0 \leq n \leq N}$ es una martingala.

Corolario 1:

El tiempo de parada ν_0 satisface:

$$U_0 = \mathbb{E}(Z_{\nu_0} | \mathcal{F}_0) = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0)$$