

Clase Auxiliar 2: Introducción a las Aplicaciones en Finanzas

1. Apuntes

1.1. Introducción Conceptual

1. Futuros.
2. Opciones.
3. Valoración por arbitraje.
 - a) Futuro.
 - b) Paridad *put/call*.

1.2. Formalización Matemática

1.2.1. Contexto

Un modelo de tiempo discreto para un mercado financiero se construye sobre un espacio de probabilidad finito $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ equipado con una filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N$, donde N es el horizonte que nos interesa estudiar. Suponemos que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y que $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ y que $\mathbb{P}(\omega) > 0 \forall \omega \in \Omega$. El mercado consistirá en $d + 1$ activos financieros cuyos precios al tiempo n están dados por las variables aleatorias no negativas $\{S_n^0, \dots, S_n^d\}$ las cuales son $\mathcal{F}_n$ -medibles. El activo indexado por 0 corresponde a un bien sin riesgo y normalizamos de modo que $S_0^0 = 1$. Además si el retorno del activo sin riesgo en un periodo es igual a r , obtenemos que $S_n^0 = (1+r)^n$. Finalmente el coeficiente $\beta_n = 1/S_n^0$ se interpreta como un factor de descuento y a los activos indexados por $i = 1, \dots, d$ se les llama activos riesgosos.

Definición 1. [Estrategia de Comercio Autofinanciante]

Una estrategia de comercio es un proceso estocástico predecible $\phi = ((\phi_n^0, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N} \in \mathbb{R}^{d+1}$ donde ϕ_n^i representa el número de acciones del activo i mantenidas en el portafolio en el instante n .

El valor del portafolio en el tiempo n está dado por:

$$V_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n$$

Y el valor descontado del portafolio en el tiempo n está dado por:

$$\tilde{V}_n(\phi) = \beta_n(\phi_n \cdot S_n) = \phi_n \cdot \tilde{S}_n$$

Una estrategia es *autofinanciante* si para todo $n \in \{0, \dots, N\}$:

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$$

Proposición 1:

Son equivalentes:

1. La estrategia ϕ es autofinanciante.
2. Para todo $n = 1, \dots, N$:

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta S_j$$

Donde $\Delta S_j = S_j - S_{j-1}$.

3. Para todo $n = 1, \dots, N$:

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j$$

Donde $\Delta S_j = \tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$.

Proposición 2:

Par todo proceso predecible $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ y para toda v.a. $\mathcal{F}_0$ -medible V_0 , existe un único proceso predecible $(\phi_n^0)_{0 \leq n \leq N}$ tal que la estrategia $\phi = (\phi^0, \dots, \phi^d)$ es autofinanciante y con valor inicial V_0 .

Definición 2. [Estrategia Admisible]

Una estrategia ϕ es admisible si es autofinanciante y para todo $n = 0, \dots, N$, $V_n(\phi) \geq 0$.

Definición 3. [Estrategia de Arbitraje]

Es una estrategia admisible con valor inicial cero y valor final distinto de cero.

Proposición 3:

Sea $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ una martingala y $(H_n)_{0 \leq n \leq N}$ un proceso predecible. Sea $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ definida por:

$$\begin{aligned} X_0 &= H_0 M_0 \\ &= H_0 M_0 + \sum_{i=1}^n H_i \Delta M_i \end{aligned}$$

Es una martingala.

Proposición 4:

Un proceso estocástico adaptado real (M_n) es una martingala si y sólo si para todo proceso predecible (H_n) se tiene que:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N H_n M_n \right) = 0$$

Definición 4. [Mercado Viable]

Un mercado es viable si no existen oportunidades de arbitraje.

Lema 1:

Sea Γ el cono convexo de las variables aleatorias estrictamente convexas y sea:

$$\tilde{G}_n(\phi) = \sum_{j=1}^n (\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d)$$

Entonces si el mercado es viable todo proceso predecible satisface:

$$\tilde{G}_N(\phi) \notin \Gamma$$

Teorema 1:

El mercado es viable si y sólo si existe una medida de probabilidad $\mathbb{P}^*$ equivalente a $\mathbb{P}$ tal que los precios descontados de los activos son $\mathbb{P}^*$ -martingalas.

1.2.2. Mercados completos y valorización de opciones

Definimos una opción europea de madurez N dando su *payoff* $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N$ -medible.

Definición 5. [Activo Contingente Obtenible]

El activo contingente (*contingent claim*) definido por h es obtenible si existe una estrategia admisible cuyo valor en N es h .

Definición 6. [Mercado Completo]

Un mercado es completo si todo activo contingente es obtenible.

Teorema 2:

Un mercado viable es completo si y sólo si existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}^*$ equivalente a $\mathbb{P}$ tal que los precios descontados de los activos son $\mathbb{P}^*$ -martingalas.

1.2.3. Valorizando y Cubriendo activos contingentes en un mercado completo

Asumamos que el mercado es viable y completo. Denotemos por $\mathbb{P}^*$ la única medida de probabilidad bajo la cual los precios descontados de los activos son martingalas. Sea h una variable aleatoria no negativa $\mathcal{F}_N$ -medible y ϕ la estrategia admisible que replica el activo contingente definido por h , es decir:

$$V_N(\phi) = h$$

La secuencia $(\tilde{V}_n)_{0 \leq n \leq N}$ es una $\mathbb{P}^*$ -martingala, y consecuentemente:

$$V_0(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$$

Y más generalmente:

$$V_n(\phi) = S_n^0 \mathbb{E}^*\left(\frac{h}{S_N^0} \middle| \mathcal{F}_n\right), \quad n = 0, 1, \dots, N$$

. En cualquier tiempo, el valor de la estrategia admisible que replica h está determinado completamente por h . Es sumamente natural llamar a $V_n(\phi)$ el precio de la opción, pues es la riqueza necesaria en tiempo n para replicar h en tiempo N siguiendo la estrategia ϕ . Si al tiempo 0 un inversor vende la opción por:

$$\mathbb{E}^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$$

El puede seguir la estrategia replicante ϕ para generar la cantidad h en el tiempo N . En otras palabras está perfectamente cubierto.

2. Problemas

Problema 1: El modelo de Cox, Ross y Rubinstein

El modelo de CRR es una versión en tiempo discreto del modelo de Black & Scholes. Considera la existencia de sólo un activo riesgoso cuyo precio en el tiempo n es S_n para $n = 0, \dots, N$ y la existencia de un activo sin riesgo cuyo retorno es igual a r . Denotaremos por S_n^0 el precio del activo sin riesgo en el instante n y se tiene que $S_n^0 = (1 + r)^n$.

El activo riesgoso se modela como sigue: De un periodo a otro el precio del activo solo puede subir o bajar en proporciones fijas, es decir:

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1 + a) \\ S_n(1 + b) \end{cases}$$

Donde $-1 < a < b$ y el precio inicial del activo S_0 es dado. El conjunto de los posibles estados es entonces $\Omega = \{1 + a, 1 + b\}^N$. Cada N -tupla representa los valores sucesivos que toma el cociente S_{n+1}/S_n . También asumimos que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\mathcal{F}_N = \mathcal{P}(\Omega)$. Para cada $n = 1, \dots, N$ $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$. Notemos que la hipótesis de que $\mathbb{P}(\omega) > 0 \forall \omega \in \Omega$ implica que $\mathbb{P}$ está definida únicamente salvo equivalencia. Ahora introducimos las variables $T_n = S_n/S_{n-1}$, para $n = 1, \dots, N$. Si $(x_1, \dots, x_N) \in \Omega$, $\mathbb{P}(x_1, \dots, x_N) = \mathbb{P}(T_1 = x_1, \dots, T_N = x_N)$. Como resultado conocer $\mathbb{P}$ es equivalente a conocer la ley de $(T_1, \dots, T_N)$. Además $\sigma(S_1, \dots, S_n) = \sigma(T_1, \dots, T_n)$.

1. Muestre que el precio descontado $(\tilde{S}_n)$ es una martingala bajo $\mathbb{P}$ si y sólo si $\mathbb{E}(T_{n+1}/\mathcal{F}_n) = 1 + r \forall n \in \{0, \dots, N\}$.
2. Deduzca que $r \in (a, b)$ para que el mercado sea libre de arbitraje.
3. De una estrategia de arbitraje si la condición encontrada en el punto anterior no se satisface.
4. A partir de ahora asumiremos que $r \in (a, b)$ y definiremos $p = (b - r)/(b - a)$. Muestre que $(\tilde{S}_n)$ es una $\mathbb{P}$ -Martingala si y sólo si las variables aleatorias $T_1, T_2, \dots, T_N$ son variables I.I.D. tales que $\mathbb{P}(T_1 = 1 + a) = p = 1 - \mathbb{P}(T_1 = 1 + b)$. Concluya que el mercado es libre de arbitraje y completo.
5. Denotamos por C_n (resp. P_n) el valor en el tiempo n de una *call* europea (resp. *put* europea) en una acción del activo riesgoso, con *strike* K y madurez N .

a) Derive la paridad *put/call*:

$$C_n - P_n = S_n - K(1 + r)^{N-n}$$

Considerando que son conocidos los precios de la *put* y la *call* como esperanzas condicionales.

b) Muestre que $C_n = c(n, S_n)$ donde c es una función de K, a, b, r y p .

6. Muestre que la estrategia que replica a la *call* está caracterizada por la cantidad $H_n = \Delta(n, S_{n-1})$ en el tiempo n , donde Δ estará expresado en función de c .