**Cálculo Estocástico**

**Profesor: Joaquín Fontbona**

Auxiliares: Héctor Olivero y Julio Backhoff

1. Sea $X = (X_n)_n$ proceso adaptado e integrable. Probar que $X$ es martingala si y solo si $\forall \tau$ tiempo de parada acotado, se tiene que $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$.

2. Sea $Y = (Y_n)_n$ variables aleatorias i.i.d. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, y sea $\mathcal{F}$ su filtración natural. Sea $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$
   Se sabe que $\mathbb{E}\left(e^{uY_1}\right) = e^{\frac{u^2\sigma^2}{2}}$.

   a) Sea $Z_n^u = exp\left\{uX_n - \frac{nu^2\sigma^2}{2}\right\}$. Muestre que para todo $u \in \mathbb{R}$ el proceso $Z_n^u$ es una martingala.
   b) Muestre que, para cada $u$, el proceso $Z_n^u$ converge casi seguramente a una variable aleatoria finita (y encuentre su límite en función de $u$). ¿Hay convergencia en $L^1$?. ¿Es posible encontrar $Z \in L^1$ tal que $Z_n^u = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$?.

3. Sea $M = (M_n)_n$ una martingala tal que $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(M_n^2\right) < \infty$. Probar que $M$ converge c.s. y en $L^2$.

4. Martingala Intrínseca de un Proceso de Ramificación

   Un proceso de ramificación a calores en $\mathbb{Z}$ se define de la manera siguiente:
   Sea $\{X_k^{(n)}; n, k \in \mathbb{N}\}$ una familia de v.a. i.i.d. a valores en $\mathbb{Z}_+$ de media $\mu < \infty$ y varianza $\sigma^2 \in (0, \infty)$.
   Se define $Z_0 := 1$ y recursivamente,

$$Z_{n+1} := X_1^{(n+1)} + \cdots + X_{Z_n}^{(n+1)}$$

   (Es decir, $Z_{n+1}$ es el número total de 'hijos'de los $Z_n$ individuos de la generación n-ésima, siendo $X_i^{(n+1)}$ el número de hijos del individuo $i \in \{1, ..., Z_n\}$.)

   i) Pruebe que el proceso definido para cada $n \geq 1$ por $M_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$ es una martingala con respecto a la filtración $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, ..., Z_n)$.
   ii) Muestre que $\mathbb{E}\left(Z_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right) = \mu^2 Z_n^2 + \sigma^2 Z_n$
   iii) Pruebe usando lo anterior que $\mathbb{E}\left(\sup_n M_n^2\right) < \infty$ ssi $\mu > 1$
   iv) Pruebe que en el caso $\mu > 1$, $M_n$ converge casi seguramente y en $L^2$ a una v.a. $M_\infty$ con

$$Var(M_\infty) = \frac{\sigma^2}{\mu(\mu - 1)}$$

   Dé una interpretación de esto en términos del comportamiento asintótico del número de individuos de la generación $n$, cuando $n \to \infty$