Cálculo Estocástico

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliares: Héctor Olivero y Julio Backhoff

1. Pruebe que si X,A y Z son variables aleatorias reales definidas en $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, tales que X es medible c/r a una tribu subtribu $\mathcal{F} \subset \Sigma$, y A es independiente de $\mathcal{F}$ y de $\sigma(Z)$, entonces:

$$\mathbb{E}\left(f(X)g(Z)h(A)|\mathcal{F}\right) = f(X)\mathbb{E}(g(Z)|\mathcal{F})\mathbb{E}(h(A))$$

para todas funciones f,g y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotadas.

2. *a*) Sea $\mathcal{B}$ una subtribu de $\mathcal{A}$, T una v.a. $\mathcal{B}$-medible a valores en $(E, \mathcal{E})$ y X una v.a. a valores en $(F, \mathcal{F})$ independiente de $\mathcal{B}$. Sea h una función medible positiva o tal que $h(X, T)$ sea integrable. Entonces:

$$\mathbb{E}\left[h(X,T)|\mathcal{B}\right] = H(T)$$

donde $H(t) = \mathbb{E}(h(X,t))$.

b) Sean $T_i \sim exp(\lambda_i)$ con $i = 1, 2$ independientes. Calcule $\mathbb{P}(T_1 \leq T_2)$

3. Sea F un conjunto de funciones a valores reales definidas en X. Se define la tribu generada por F como

$$\sigma(F) := \sigma\left(\left\{f^{-1}(C) : f \in F, C \in \beta(\mathbb{R})\right\}\right)$$

Pruebe que $\sigma(F) := \sigma\left(\left\{\bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(C_i) : f_i \in F, C_i \in \beta(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\right\}\right)$ y que si D es una clase que genera $\beta(\mathbb{R})$, entonces $\sigma(F) := \sigma\left(\left\{\bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(C_i) : f_i \in F, C_i \in D, k \in \mathbb{N}\right\}\right)$

4. (Teorema de la Clase Monótona Funcional) Sea X un conjunto y $\mathbb{B}(X)$ el e.v. de las funciones sobre X acotadas a valores reales.

Definición 1. Sea H s.e.v. de $\mathbb{B}(X)$. Se dice que H es un **MVS** si satisface:

I) H contiene a las constantes.

II) Para toda sucesión $(f_n)_n \subset H$ creciente con $f = \lim_n f_n$ acotada, se tiene que $f \in H$

a) Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}(X)$ cerrada para la intersección y tal que $\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{C}\} \subset H$. Pruebe que H contiene a $\{f \in \mathbb{B}(X) : f \text{ es } \sigma(\mathcal{C}) - \beta(\mathbb{R}) - \text{medible}\}$

El objetivo de esta pregunta es probar el siguiente teorema:

Teorema 1:
(Clase Monótona Funcional) Sea $H \subset \mathbb{B}(X)$ un MVS y $H_0 \subset H$ cerrado para la multiplicación. Entonces H contiene a

$$\{f \in \mathbb{B}(X) : f \text{ es } \sigma(H_0) - \beta(\mathbb{R}) - \text{medible}\}$$

Para hacerlo supongamos por ahora que H es además cerrado para la convergencia uniforme (más adealnte se comprobará que esto es efectivamente cierto cuando H es un MVS).

b) Pruebe que:

a) Para todo polinomio p y toda $f \in H_0$ se tiene $p(f) \in H$. Deduzca que para toda función continua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se tiene que $\phi(f) \in H$ para toda $f \in H_0$.

b) Considerando la sucesión de funciones $\phi_n(y) := [1 \wedge ((y - a) \vee 0)]^{\frac{1}{n}}$. Muestre que para cada $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $\mathbb{1}_{\{f>a\}} \in H$. Observe que para todo $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$ y $f_1, ..., f_k \in H_0$, se tiene que $\mathbb{1}_{\{f_1>a_1,...,f_k>a_k\}} \in H$.

c) Concluya el Teorema

c) (Lema de Atkinson) Pruebe que todo MVS es cerrado para la convergencia uniforme.
Hint: Dado $f_n \to f$ uniformemente obtenga una subsucesión n_k tal que $\epsilon_k := ||f_{n_k+1} - f_{n_k}||$ sea sumable. Luego considere la sucesión $g_k = f_{n_k} - \sum_{j \geq k} \epsilon_j + 2\sum_{j \geq 1} \epsilon_j$